

Emergência de Inteligência nos Sistemas

F. Carvalho Rodrigues^{1,+,*}, André S. Ribeiro^{2,3,·}

¹NATO Headquarters, Division of Scientific and Environmental Affairs, B-1100 Brussels, Belgium. Tel:(+322 707 42 31), Fax:(+322 707 42 33), E-mail: fcr@hq.nato.int ;

²Universidade Independente, Faculdade de Ciências de Engenharia, Av. Marechal Gomes da Costa, Lote 9, 1800-255 Lisboa, Portugal Tel:(+351218361900), Fax: (+351 218361922), Email: A_Ribeiro@uni.pt;

³IADE, Instituto de Artes Visuais Design e Marketing, Av^a D. Carlos I, nº4, 1200-649 Lisboa, Tel.: (+351 21 393 96 00), Fax: (+351 21 397 85 61)

Abstract

A system's structure resides in the interactions, being emergency and transition of phase synonyms, caused by the variation of the relativistic information quantity.

This variation explains the intelligence emergency in biological neuronal nets, being a measure of the intelligence of such structures.

States of maximum variability of information, low internal energy and low heat dissipation were defined as favorable for intelligence emergency.

An algorithm was built that determines those states analytically in function of connectivity, avoiding the transcomputational problem of generating all possible configurations of the systems.

Those states occur in a discontinuous way for growing values of connectivity, evidencing that only some states of a system are favorable to the intelligence emergency and that the biological neuronal nets only exist in some states being unable to evolve continuously, but by leaps.

The algorithm was validated comparing his solutions with the experimental data of the neuronal nets of C. Elegans and human brain, being verified adherence between the foreseen connectivity and the experimental measures.

It was verified that some configurations of the favorable states to the intelligence emergency are small worlds and that the constant decrease of the separation degree demands growing increase of connectivity.

Keywords: Complex System, Emergent Behavior, Intelligence, Storable Relativistic Information, Entropy, Phase Transition.

^{1 +} *On secondment from Universidade Independente, Faculdade de Ciências de Engenharia, www.uni.pt, Av. Marechal Gomes da Costa, Lote 9, 1800-255 Lisboa, Portugal, Tel.: (+351) 21 836 1900, Fax: (+351) 21 836 1922, E-mail: fcr@uni.pt*

^{*}Disclaimer: The views presented in this paper are solely those of the author and do not necessarily reflect the views of his employer or that of any NATO country government.

[·] *With fellowship from Fundação Para a Ciência e a Tecnologia, for PhD at Instituto Superior Técnico.*

Índice

Abstract.....	1
Índice.....	2
Capítulo 1: Critérios para definir inteligência de sistemas.....	3
Capítulo 2: Emergência de inteligência em sistemas.....	12
Capítulo 3: Estratégias dos sistemas para atingirem estados propícios à emergência de inteligência	31
Capítulo 4: Sistemas mundos pequenos não são necessariamente propícios à emergência de inteligência.....	46
Capítulo 5: A relação entre conectividade e grau de separação médio em grafos.....	59

Capítulo 1

Critérios para definir inteligência de sistemas

Resumo

Provando que emergência [1][2] e transição de fase [3][4] são sinónimos e consequência da variação da quantidade relativista de informação em sistemas, mostramos que esta variação pode, de um modo semelhante às forças “entrópicas” [5][6], agir como uma força sobre o sistema. Ao contrário da variação da entropia, a variação de informação pode ainda impor mudanças na estrutura do sistema [7][8] ao atingir determinado valor, enquanto que a variação de entropia apenas força o sistema a alcançar um estado de equilíbrio.

As propriedades dos sistemas [9][10] são definidas pela estrutura de interações, e não pelas propriedades dos seus elementos [1][2]. Usando um modelo geométrico de sistema onde elementos são pontos sem propriedades internas, e interações são linhas que unem os pontos, é possível associar uma quantidade de informação relativista a cada configuração de ligações.

Assim, podemos definir uma quantidade de armazenável de informação relativista de cada estado de sistema, que mede a variabilidade em informação deste.

Propomos uma medida para inteligência de cada estado de um sistema. Sustentamos que os sistemas são tanto mais inteligentes quanto maior for a quantidade de armazenamento de informação que possam sustentar, tendo para tal uma necessidade mínima por energia interna e dissipação de calor [11][12].

Além disso, estabelecemos o conceito de estado propício para a emergência de inteligência em sistemas, que corresponde a um máximo relativo em quantidade armazenável de informação relativista, dissipação de calor mínima e energia interna mínima numa dada vizinhança de estados no espaço de estados do sistema.

Palavras-chave: Emergência, Transição de Fase, Inteligência, Sistema.

Introdução

A natureza dos sistemas, i.e., as propriedades que estes exibem, não reside nas propriedades internas dos elementos mas sim nas interações entre eles [1][2], responsáveis pela a estrutura adoptada.

Sistemas que mantêm a sua estrutura inalterada com o passar do tempo, representam estados estáveis, sendo que um estado, e a estrutura que o suporta, é estável quando tem energia interna e necessidades de dissipação mínima de calor [11][12] durante o seu funcionamento.

Outra condição para a estabilidade de uma estrutura é que esta deve ser compatível com um certo valor de informação [7][8], valor esse que pode ser associado à distribuição de uma interação entre os elementos (independentemente da natureza de tal interação).

Considerando que sistemas inteligentes precisam de uma estrutura estável que os suporte as condições anunciadas deveriam se aplicar a eles. Estas condições são as necessárias para a emergência de inteligência num sistema.

Na nossa aproximação ao problema de determinar condições para a emergência de inteligência num sistema, os estados internos dos elementos, embora possam existir, não são considerados. Apenas as interações entre elementos são levadas em conta. Esta aproximação baseia-se na suposição da teoria geral dos sistemas de que a natureza de um sistema reside nas interações e não nos estados internos dos elementos.

A mesma aproximação é usada, por exemplo, na teoria dos mundos pequenos [13][14] onde a dinâmica do sistema reside somente no número de ligações regulares e aleatórias, independentemente dos estados internos dos elementos, tendo este modelo tido bastante êxito na descrição da dinâmica de vários sistemas [14].

Assim, representamos os sistemas geometricamente, sendo os elementos representados por pontos geométricos, sem propriedades internas, e as interações por linhas que ligam os elementos [7]. É deste modo que são representadas redes neurais, naturais ou artificiais, numa grande variedade de áreas [15][16][17][18], focando as propriedades constitutivas [9] dos sistemas.

Usando tal modelo podem-se relacionar a variação da quantidade de informação com o conceito de emergência num sistema.

1. Emergência e transição de fase como consequências da variação da quantidade relativista de informação

É conhecido que sistemas sofrem uma transição de fase [19] quando a sua conectividade, a razão entre o número de ligações e elementos, alcança um certo valor [3][4]. Tal transição de fase, considerando um modelo de pontos e linhas [4], consiste na emergência de uma nova estrutura onde todos os elementos pertencem a um mesmo agrupamento, de uma estrutura inicial de elementos escassamente ligados, simplesmente por adição de ligações de modo aleatório [3][4].

Quando o comportamento da estrutura nova é diferente e não explicável pelo comportamento da estrutura prévia, é dito que um comportamento novo emergiu [20][21]. Então, emergência e transição de fase são sinónimas, consequências da penetração de uma interação, de qualquer natureza, entre os elementos de um sistema.

A transição de fase é causada pela variação da quantidade de informação relativista do sistema [7][8] que age como uma força que impele a estrutura a mudar.

A curva em “S” (característica das transições de fase) do tamanho do maior agrupamento [4] é obtida ao colocar ligações aleatoriamente entre os elementos do sistema, com todas as ligações igualmente prováveis, i.e., a transição de fase é o resultado de um processo de difusão de interações os elementos de um sistema.

Emergência e transição de fase do tamanho do maior agrupamento são sinónimas. A sua causa é a mesma. A quantidade, cuja variação, explica ambos os fenómenos, é a quantidade relativista de informação [7][8].

Foi provado [22][23][24][25][26][27] que quando $p(i)$, a probabilidade de se receber uma mensagem “i” sobre a estrutura do sistema, alcança o valor $1/e$ (onde e é a constante de Nepper), a estrutura do sistema sofre uma transição de fase. Tal é a razão por que uma transição de fase é observada quando são somadas ligações aleatoriamente num sistema de elementos inicialmente desligados.

Para provar esta afirmação relacionámos o valor da conectividade com o da quantidade de informação, necessária para atingir uma transição de fase. Da condição de máximo de informação relativista obtém-se a conectividade mínima para uma transição de fase.

A quantidade de informação relativista é máxima para $p = 1/e$. Para que, num sistema de m elementos, se tenha a probabilidade de dois elementos terem uma ligação igual a $(1/e)$, têm que existir (m/e) ligações, visto que cada ligação liga dois elementos. Assim, neste caso, tem-se a conectividade:

$$\Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{\binom{m}{e}}{m} = \frac{1}{e} \cong \frac{1}{2} \quad (1)$$

Note-se que 0.5 é maior que $(1/e)$, mas sabe-se que a taxa de difusão mais elevada acontece em $p = (1/e)$. Em casos como os grafos, a transição de fase ocorre quando a conectividade atinge $1/2$. Tal é uma consequência de, em condições práticas, não ser possível para um grafo de m elementos ter (m/e) ligações, visto que esta não é uma quantidade inteira.

Assim, a conectividade determina quando a transição de fase ocorre, i.e. quando se dá a emergência de um comportamento novo. Tal conectividade é alcançada quando a quantidade relativista de informação atinge o valor máximo. Concluimos que a explicação de emergência de inteligência em sistemas, tal como por exemplo as redes neuronais biológicas, reside na variação da informação relativista.

Então, esta variação deve ser usada como uma medida da inteligência da estrutura de um sistema, e assim, toma-se necessário quantificar esta variável, para cada possível estrutura de um sistema.

2. Quantidade relativista de informação de uma configuração de sistema

Na teoria de Shannon de informação [28], todas as mensagens são igualmente pertinentes e consideradas, ao calcular a quantidade de informação de um estado do sistema. Se $p(i)$ é a probabilidade do sistema B receber uma mensagem de um sistema A,

a quantidade de informação de um agrupamento de n mensagens de A para B, é determinada por:

$$I = - \sum_{i=1}^n [p(i) \cdot \ln(p(i))] \quad (2)$$

Esta quantidade é independente do observador.

Há situações que não podem ser estudadas com a equação de Shannon na sua forma original. Para estes casos, foi criada a teoria da informação relativista [7][8].

Esta teoria leva em conta o observador, porque associa uma “importância” a cada mensagem, associando uma função de peso a cada valor de probabilidade de uma mensagem, determinada pelas “expectativas” do receptor. O valor da função de peso é dependente do “sistema de crenças” do receptor [29][30][31].

No nosso modelo, o receptor só considera pertinentes as mensagens sobre o número de elementos com i ligações (onde $i = 0, \dots, m-1$, e m é o número de elementos), que são as necessárias para descrever as características constitutivas do sistema (i.e., a sua estrutura).

Neste caso, a quantidade de informação relativista ganha pelo observador, ao receber uma mensagem com o “número de elementos com i ligações”, é:

$$I_{rel} = - p(i) \cdot \ln[p(i)] \quad (3)$$

Esta função possui um comportamento bastante diferente do da fórmula de Shannon. Perde a sua simetria em torno do valor $p = 0.5$ e o valor máximo é obtido quando $p(i) = 1/e$ (figura 1):

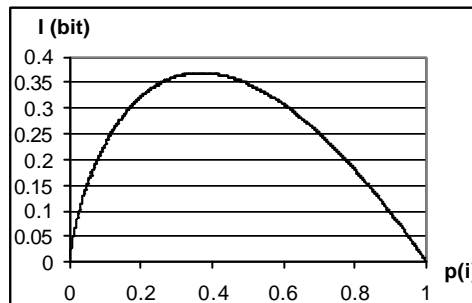


Figura 1 – Informação relativista versus probabilidade para receber a mensagem.

Em geral, para descrever completamente uma estrutura em termos do número de elementos com $i = 0, \dots, m-1$ ligações, precisam-se de m mensagens. A quantidade total de informação, sendo $p(i)$ a probabilidade de um elemento ter i ligações, é determinada por:

$$I_{rel} = - \sum_{i=0}^{m-1} [p(i) \cdot \ln p(i)] \quad (4)$$

No nosso caso, a fórmula é idêntica à definição de Shannon mas o espectro de valores, p_i , é discreto e os seus possíveis valores restringidos pelas possíveis

configurações de ligações. Como só consideramos as propriedades constitutivas dos sistemas, esta medida é relativa.

A cada configuração de ligações corresponde um valor característico de informação. A cada estado corresponde uma gama de valores de informação. Variar a quantidade relativista de valor de informação implica mudanças na estrutura do sistema.

3. Variação da quantidade relativista de informação como causa de mudanças na estrutura

Ambas as variações, da informação e da entropia termodinâmica em sistemas, estão relacionadas com mudanças estruturais. No entanto, embora formalmente semelhantes, estas variações medem aspectos diferentes de uma transição de fase.

A variação de informação é responsável por uma mudança estrutural no sistema, enquanto que a variação da entropia termodinâmica é uma medida da energia necessária para tais transformações acontecerem a uma certa temperatura, ou, para um sistema atingir o equilíbrio, agindo a variação como uma força que impele o sistema a atingir tal estado.

Desta força, denominada força entrópica, são conhecidos vários exemplos em várias áreas [5][6]. Um exemplo de um fenómeno dirigido por forças entrópicas é a difusão [32] em misturas químicas. Em alguns casos, tal aumento global de entropia leva a uma diminuição, em certas “zonas restritas”, de entropia.

Para criar ordem num sistema, a entropia termodinâmica deve ser exportada para o exterior [33][34], caso contrário a temperatura do sistema subiria. A necessidade de dissipação de calor deve, então, ser considerada.

Por sua vez, a variabilidade da quantidade relativista de informação de um certo estado, pode-se medir pelo intervalo de valores de informação das configurações possíveis do estado. Tal intervalo permite definir a quantidade de informação armazenável de um estado.

4. A quantidade de informação armazenável

Da teoria dos sistemas sabe-se que estrutura e funcionamento são uma e a mesma coisa [9], pelo que, calcular a quantidade de informação armazenável da estrutura é equivalente a calcular a mesma quantidade para o funcionamento.

Para obter uma medida de inteligência de cada estado de um sistema definiremos então a quantidade de informação relativista armazenável ou capacidade de armazenamento de informação de um sistema. Esta quantidade mede a variabilidade de valores de informação de um sistema num certo estado, ou seja, mede a gama de valores de informação das configurações que suportam o estado:

$$\Delta I = I^{\max} - I^{\min} \quad (5)$$

Cada configuração de ligações de um estado tem uma quantidade característica de informação relativista determinada por (4). A quantidade de informação armazenável relativista é determinada pela diferença entre a quantidade de informação relativista da configuração de ligações com quantidade mais alta de informação relativista (I^{\max}) e a

quantidade de informação relativista da distribuição com mais baixa quantidade de informação relativista (I^{\min}).

Uma das condições necessárias para um sistema estar num estado propício à emergência de inteligência, numa certa vizinhança de estados, é possuir máxima capacidade de armazenamento de informação, porque a tal corresponde um estado de variabilidade de informação máxima.

No entanto, como qualquer sistema, sistemas num estado propício à emergência de inteligência estão sujeitos a leis termodinâmicas. Assim analisamos os sistemas do ponto de vista energético de modo a estabelecer mais condições necessárias à emergência de inteligência.

5. Restrições termodinâmicas à capacidade de armazenamento de informação

Como todos os sistemas, os sistemas inteligentes precisam de energia para criar a sua estrutura e, ao funcionar, têm que dissipar energia sob forma de calor. A estrutura adoptada deve uma com custo energético mínimo.

É possível, usando a representação geométrica, calcular o calor dissipado e a variação da energia interna de um sistema, para atingir um certo estado.

A quantidade de calor necessário dissipar pode ser calculada de acordo com a conhecida relação da termodinâmica clássica [35]:

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (6)$$

Para calcular o calor, tem que se saber a variação de entropia. Pode-se calcular a entropia de um estado, usando a definição canónica de entropia, estabelecida por Boltzmann. Se W_i é o número de microestados (configurações de n ligações por m elementos, no nosso caso) de um certo estado com i ligações, e k_b , a constante de Boltzmann, a entropia de um estado é determinada por:

$$S_i = k_b \cdot \text{Log}(W_i) \quad (7)$$

Para calcular a variação de entropia pode-se considerar um estado inicial, sem ligações e, então, com só uma possível distribuição de ligações. Se o número de distribuições é 1, então a entropia de tal estado inicial é nula.

Usando este método, pode-se calcular o calor dissipado, associando a qualquer estado a sua entropia, conhecendo o número total de distribuições de ligações distintas, e supondo que o estado inicial é de entropia nula, pode-se usar a seguinte equação:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \quad (8)$$

Para chegar a um certo estado, o sistema tem que dissipar a quantidade de calor dada por (8), que corresponde a uma variação de entropia.

Por sua vez, a energia interna pode ser calculada de acordo com o modelo de sistema usado, a partir do número m de elementos e o número n de ligações:

$$U = U(m, n) \quad (9)$$

Tudo que é necessário saber, de modo a determinar estados propícios à emergência de inteligência, é a lei de variação da energia interna estado tendo em conta que cada elemento e ligação terá uma determinada energia interna, sendo que a energia é uma quantidade positiva, pelo que:

$$\frac{\partial U}{\partial m} > 0 \wedge \frac{\partial U}{\partial n} > 0, \forall n, m \quad (10)$$

Destas relações é possível estabelecer uma comparação entre a energia interna total de dois estados distintos, e determinar qual tem menor energia interna.

Considerando a quantidade de calor necessário dissipar, a energia interna necessária e a quantidade de informação relativista armazenável, pode-se estabelecer um critério para determinar quais estados, de um sistema de número constante de elementos, são propícios à emergência de inteligência.

6. Estados propícios para a emergência de inteligência

É possível definir, usando uma combinação das condições para a emergência de inteligência, o conceito de estado propício à emergência de inteligência.

As condições de entropia e energia interna mínimas, para sistemas de processamento de informação atingirem estados propícios à emergência de inteligência, foram propostas em vários trabalhos [11][12]. A estas condições, temos que somar a condição de máxima capacidade de armazenamento informação.

Estruturas propícias à emergência de inteligência são aquelas que permitem máximo armazenamento de informação e simultaneamente têm uma energia mínima, quer interna, quer em calor necessário remover.

Mais, como qualquer optimização ocorre dentro dos limites de uma vizinhança de estados, se U é a energia interna de um sistema e Q o calor por ele dissipado, as condições para um estado ser propício à emergência de inteligência dentro de uma vizinhança de estados, podem ser declaradas por:

$$\Delta I = I_{\max} - I_{\min} \quad \text{máximo} \quad (11)$$

$$U = U(m, n) \quad \text{mínimo} \quad (12)$$

$$Q = T \cdot \Delta S \quad \text{mínimo} \quad (13)$$

Considerando a temperatura do sistema constante (e tal é uma necessidade comum dos mamíferos, por exemplo, no que concerne ao sistema nervoso central) e calculando a variação de entropia ao passar de um estado de nenhuma ligação para um estado de n ligações, a última condição pode ser reduzida a:

$$S(m, n) \quad \text{mínima} \quad (14)$$

Combinando estas condições podem-se determinar quais estados são propícios à emergência de inteligência, do espectro de todos os possíveis estados de um sistema com um número conhecido de elementos.

Conclusões

Num sistema, emergência e transição de fase são sinónimos, causados pela variação da quantidade relativista de informação. Esta variação age como uma força que obriga o sistema a passar por uma transição de fase (como no caso da penetração de um tipo novo de interação entre os elementos) e adoptar uma nova estrutura, quando a informação atinge determinado valor.

Esta variação pode ser usada como uma medida da inteligência de uma estrutura, pois mede o intervalo de valores de informação que o sistema pode suportar. Tal medida pode ser obtida pelo cálculo da capacidade de armazenamento de informação relativista, i.e., a diferença entre as informações mais alta e mais baixa do espectro de possíveis configurações de um estado.

Sistemas são tanto mais inteligentes quanto maior for a variabilidade de informação que possam sustentar, tendo para isso uma necessidade mínima de energia interna e dissipação de calor. Destas condições é possível determinar estados propícios à emergência de inteligência num sistema de número conhecido de elementos.

Desenvolvimentos futuros

No modelo usado não considerámos estados internos dos elementos. Mais desenvolvimentos, como considerar estes estados, poderiam permitir o estabelecimento de condições adicionais para a emergência de inteligência em sistemas.

Para sistemas de mais de 1000 elementos, o cálculo da quantidade de informação de cada configuração e entropia de cada estado, tornam-se um problema transcomputacional [36][37]. No entanto, embora a determinação exacta destas quantidades para qualquer estado de um sistema com um número grande de elementos não seja possível, é possível determinar, no caso da variabilidade de informação para quais estados o seu valor é um máximo relativo dentro de uma certa vizinhança de estados [38], e é possível, para a entropia, estabelecer uma lei de variação simples.

Referências

- [1] Holland, John H. *Hidden Order: How Adaptation Builds Complexity*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1995.
- [2] Holland, John H. *Emergence: From Chaos to Order*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1998.
- [3] P. Erdos and A. Rényi, On the evolution of random graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* 5 (1960), 17-61.
- [4] Kauffman S. A. *At Home in the Universe: The Search for Laws of Self-Organization and Complexity*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [5] Bernd Mayer, Gottfried Kohler and Steen Rasmussen, "Simulation and dynamics of entropy-driven, molecular self-assembly processes", *Physical Review E*, April, 1997, Vol. 55, n 4.
- [6] "Entropically driven self-assembly of multichannel rosette nanotubes", Hicham Fenniri, Bo-Liang Deng, Alexander E. Ribbe, Klaas Hallenga, Jaby Jacob and P. Thiyagarajan, <http://www.pubmedcentral.nih.gov/articlerender.fcgi?artid=128555>

- [7] Carvalho Rodrigues, F., 1990/1991, "Função de Coesão de Estruturas baseadas em Informação", Memórias da Academia, TOMO XXXI, Academia das Ciências de Lisboa.
- [8] J. Pinto Peixoto, F. Carvalho Rodrigues, "Sistemas, Entropia, Coesão", Editorial Discórdia, Lisboa, 1991.
- [9] Von Bertalanffy, Ludwig (1973) *General System Theory* (Harmondsworth: Penguin Books).
- [10] Ashby, W. Ross, *An Introduction to Cybernetics*. London: Chapman & Hall, 1956.
- [11] Coren, R. L. Empirical Evidence for a Law of Information Growth. *Entropy* 2001, 3, 259-273.
- [12] Jonathan D.H. Smith, "Some Observations on the Concepts of Information-Theoretic Entropy and Randomness", *Entropy*, ISSN 1099-4300, www.mdpi.org/entropy/
- [13] Watts, D. J. & Strogatz S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature* 393, 440-442 (1998).
- [14] Barabasi, Albert-Laszlo. *Linked: The New Science of Networks*. Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing, 2002.
- [15] B. Bollobas. *Random Graphs*. Academic Press, NY, 1985
- [16] <http://ginger.hpl.hp.com/shl/projects/constraints/specialAIJ/node3.html>
- [17] White, J. G., Southgate, E., Thomson, J. N. and Brenner, S. (1986). "The structure of the nervous system of *Caenorhabditis Elegans*". *Phil. Trans. R.Soc. Lond. B* 314, 1-340.
- [18] Achacoso, T., and Yamamoto, W. (1992) *AY's Neuroanatomy of C. Elegans for computation*, Boca Raton, FL: CRC.
- [19] http://www.wikipedia.org/wiki/Phase_transition
- [20] M. Mitchell Waldrop, "Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos", New York: Touchstone, 1992;
- [21] <http://smile.jcon.org/soft/product/ref/entry/e/Emergence.html>
- [22] "The Military Landscape - Mathematical Models of Combat", Woodhead Publishing Ltd., Inglaterra, 1993. J. T. Dockery, A. E. R. Woodcock, F. Carvalho Rodrigues.
- [23] Application of information entropy to defect characterisation in leather", *Journal of the Society of Leather Technologists Chemists*, 75, 10; F. Carvalho Rodrigues, D. Fernando Carvalho, J. Pinto Peixoto, M. Santos Silva, Victor Silvestre.
- [24] "Análise Relativista da Quantidade de Informação para Avaliação de Comportamentos Emergentes no Design", Carlos Alberto M. Duarte, PhD Thesis (2001)
- [25] "Quantidade de Informação na Arquitectura Portuguesa" F. Carvalho Rodrigues, Carlos A. M. Duarte, André S. Ribeiro, Tessaleno C. Devezas, Comunicação apresentada na Academia de Ciências de Lisboa, aceite para publicação em *Idade da Imagem*, nº2, Lisboa 2001.
- [26] Carvalho Rodrigues, F., 1989. "A proposed entropy measure for assessing combat degradation", *J. Opl. Res. Soc. (UK)*, 40 (8): 789-93.
- [27] Carvalho Rodrigues, F., Dockery, J. and Rodrigues, T., 1993b, "Entropy of Plagues: A Measure Assessing the Loss of social Cohesion Due to Epidemics", *European J. of Operational Research*, 71, 45-60.
- [28] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication", *Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 379-423 and 623-656, July and October, 1948.
- [29] Glenn Shaffer "A mathematical theory of evidence", Princeton University Press, 1976.
- [30] Glenn Shaffer "The art of causal conjecture", MIT Press, 1996.
- [31] P. Pakzad and V. Anantharam, "Belief propagation and statistical physics," *Proc. 00 Conf. Inform. Sciences and Systems*, Princeton U., March 2002.
- [32] http://www.arches.uga.edu/~bhummel/6200Project/Ad_SCurve.html
- [33] Prigogine I. (1967), *Dissipative Structures in Chemical Systems, in Fast Reactions and Primary Processes in Chemical Kinetics*, a cura di Stig Claesson, Interscience, New York.
- [34] Prigogine I., Isabelle Stengers (1984), *Order out of Chaos*, Bantam, New York (trad. it. *La nuova alleanza*, Einaudi, Torino 1981)
- [35] Zemansky, Mark W., Dittman, RH, "Heat and Thermodynamics" McGraw-Hill, Physics Series, 6th edition.
- [36] H. J. Bremermann, "Complexity and transcomputability", in The Encyclopedia of Ignorance, M. Duncan, ed. Pergamon Press, Oxford (1977).
- [37] H. J. Bremermann, "Quantum-theoretical Limitations of Data Processing, Abstracts of Short Communications, International Congress of Mathematics, Stockholm (1962).
- [38] Andre S. Ribeiro, F. Carvalho Rodrigues, "The Emergence of intelligence in a system", in preparation.

Capítulo 2

A emergência de inteligência em sistemas

Resumo

Neste capítulo determinam-se os valores de conectividade de estados propícios à emergência de inteligência [1], usando um modelo de sistema onde somente as propriedades constitutivas [2][3][4] são levadas em conta. Como tal, os elementos do sistema são pontos e as interações são ligações entre pares de elementos.

Combinando as condições para a emergência de inteligência, construímos um algoritmo capaz de determinar todos os estados propícios para a emergência de inteligência em qualquer sistema de m elementos sem a necessidade de gerar todas as configurações possíveis.

Depois de testar o algoritmo em sistemas com poucos elementos, aplicamos a sistemas com número de elementos igual, respectivamente, ao sistema nervoso da *C. Elegans* e ao cérebro Humano, e comparamos as soluções, obtidas pelo algoritmo, aos dados decorrentes da observação de tais sistemas. Uma correspondência significativa entre predição e observação permite concluir a validade da definição e algoritmo para determinar estados propícios à emergência de inteligência em sistemas.

Além disso, provamos que os estados propícios acontecem em número relativamente pequeno e distanciados entre si no espaço de fases de possíveis estados. Esta é uma evidência da impossibilidade de evolução por variações mínimas da estrutura do sistema.

Palavras-chave: Emergência de Inteligência, Estado propício, Algoritmo.

Introdução

As propriedades que os sistemas exibem dependem muito mais da estrutura de interacções entre elementos, que das propriedades dos elementos como entidades individuais [2][3][4], sendo que daí resulta que, não obstante a variedade de natureza de elementos e interacções, sistemas distintos exibam propriedades comuns a todos os sistemas com estruturas similares [2][3][4][5].

Com tal conceito em mente, construímos um modelo geométrico de sistema onde só as propriedades constitutivas [4] são levadas em conta, usando pontos para representar elementos e linhas para representar interacções.

Uma definição de inteligência é então introduzida, baseada na capacidade dos sistemas para armazenar informação, dissipar calor e a energia interna necessária [1] para construir a estrutura. O objectivo é determinar se existem estados propícios para a emergência de inteligência numa vizinhança de estados possíveis, do espaço de estados do sistema.

De acordo com o modelo, o número total do sistema de ligações, n , define um estado, enquanto as possíveis distribuições de tais ligações são as configurações que suportam o estado. Usando as condições de estado propício, obtêm-se condições analíticas capazes de obter o número total de ligações de estados propícios.

Um sistema é tanto mais inteligente quanto mais informação puder armazenar, tendo simultaneamente uma dissipação de calor e energia interna mínimas [1]. Estas condições são necessárias à emergência de inteligência mas, não são suficientes. Assim, o conjunto de condições para a emergência de inteligência permitirá, para um sistema de m elementos, o cálculo de um conjunto de soluções (os estados propícios) das quais nem todas poderiam ser adoptáveis por sistemas reais. No entanto, este conjunto solução deverá conter todas as soluções adoptáveis.

As condições de energia dissipada e interna mínimas, para sistemas de processamento de informação atingirem estados propícios à emergência de inteligência, foram propostas em vários trabalhos [6][7]. A estas condições, somamos a condição de máxima capacidade de armazenamento de informação, ou seja, máxima variabilidade de valores de informação [1].

A quantidade de informação usada é quantitativa, não qualitativa, visto que é obtida da estrutura das configurações de ligações. Mais, é relativista no sentido em que apenas se consideram pertinentes mensagens sobre o número de ligações de cada elemento [5][8][9][10][11][12] e nenhum outro aspecto da estrutura. Esta escolha é suportada pelo facto de se considerarem apenas propriedades constitutivas dos sistemas, isto é, devidas à estrutura de interacções, e não devidas às propriedades internas dos elementos [1][2][4][11].

Num sistema de m elementos, se U é a energia interna de um sistema e Q o calor por ele dissipado, as condições para um estado, definido pelo número total n de ligações, ser propício à emergência de inteligência dentro de uma vizinhança de estados, pode ser declarado por [1]:

$$\Delta I = I_{\max} - I_{\min} \quad \text{máximo} \quad (1)$$

$$U = U(m,n) \quad \text{mínimo} \quad (2)$$

$$Q = T.\Delta S \quad \text{mínimo} \quad (3)$$

Considerando a temperatura do sistema constante e calculando a variação de entropia de uma transição de um estado sem ligações para um estado de n ligações, a última condição (3) pode ser reduzida a:

$$S(m,n) \quad \text{mínimo} \quad (4)$$

Combinando estas condições num algoritmo, podem-se determinar quais estados são propícios à emergência de inteligência, do espectro de todos os possíveis estados de um sistema com um número conhecido de elementos, m .

1. Estados máximos relativos de quantidade de informação armazenável

A quantidade armazenável de informação mede a variabilidade da informação de um sistema num certo estado. No entanto, o seu cálculo para todos os estados de sistemas com mais de 1000 elementos é uma tarefa transcomputational [13][14].

Ao invés, propomos um método onde somente a conectividade dos estados que são máximos relativos, dentro de uma certa vizinhança de estados, é obtida, sabendo o número total de elementos do sistema.

Foi estabelecido que a quantidade de informação relativista de um sistema de m elementos e n ligações, numa configuração específica, é determinada por [1][15]:

$$I(m,n) = - \sum_{i=0}^{m-1} \left[\binom{q(i)}{m} \ln \left(\frac{q(i)}{m} \right) \right] \quad (5)$$

Cada termo i corresponde à quantidade de informação associada à mensagem “número de elementos com i ligações, $q(i)$ ”. Sendo que cada elemento pode ter de 0 a $(m-1)$ ligações, são necessárias m mensagens para descrever a configuração.

Em cada estado, pode-se calcular ΔI , com (1), subtraindo a menor quantidade de informação, I_{\min} , à máxima, I_{\max} , de entre o conjunto de valores, sendo que cada valor corresponde a uma possível configuração distinta das n ligações entre os m elementos.

Para tal têm que se estudar a variação de I_{\max} e I_{\min} com n .

1.1 Valores extremos da quantidade de informação de uma configuração

A quantidade de informação resulta de saber o número de elementos com i ligações dada por (6) sendo que de [11][15] os valores extremos (7) são conhecidos:

$$I(m,n,i) = - \binom{q(i)}{m} \ln \left(\frac{q(i)}{m} \right) \quad (6)$$

$$I_{\min} = 0, \quad \text{para } q(i) = 0 \text{ ou } m \quad \text{e} \quad I_{\max} = 1/e \text{ para } q(i) = m/e \quad (7)$$

Como veremos, só alguns estados têm, na realidade, uma configuração tal que I é zero, e nenhum estado alcança o valor máximo (7), visto que o número de elementos com

i ligações é sempre um inteiro. Outra característica importante é que o valor máximo de I , entre estados sucessivos, não variará significativamente de um estado para outro.

Então, começaremos por determinar que estados têm configurações de quantidades de informação nula.

1.2. Estados com uma configuração com quantidade de informação nula

Como todo o $I(i)$ é positivo ou nulo, a condição necessária para uma configuração ter $I = 0$ é [16]:

$$q(i = k) = m \wedge q(i \neq k) = 0 \Rightarrow I = 0 \quad , \text{ com } k, i \in [0, m-1] \quad (8)$$

Esta condição declara que só quando todos os elementos tiverem o mesmo número de ligações, a configuração terá $I = 0$.

Para deduzir quais estados satisfazem esta condição introduzimos um argumento: “para que todos os elementos tenham o mesmo número de ligações, o número total de ligações deve ser um múltiplo de $(m/2)$, o número de elementos do sistema” (16). Isto é:

$$n = 0.(m/2), 1.(m/2), 2.(m/2), \dots, k_{\max}.(m/2) \quad (9)$$

$$\text{onde } k_{\max} \text{ é um inteiro tal que: } 0 \leq k_{\max}.(m/2) \leq m(m-1)/2$$

Por substituição pode-se verificar a validade, para todo o m e k , da condição. Esta é a primeira condição para um estado ser um máximo relativo de quantidade de informação armazenável.

Dois soluções serão eliminadas: $n = 0$ e $n = n_{\max}$, porque ambas têm só uma possível configuração distinta, pelo que $\Delta I(n = 0 \text{ ou } n_{\max})$ é nulo.

Finalmente, note que se m for ímpar, não há nenhum estado definido pelos múltiplos de $(m/2)$. Neste caso, só quando n é igual a múltiplos de m , se tem estados com uma configuração tal que sua quantidade de informação, I , é nula.

Pode-se melhorar a declaração inicial: “para todos os elementos terem o mesmo número de ligações, o número total de ligações do sistema deve ser um múltiplo de m , se m é ímpar, e de $(m/2)$, se m é par”.

Note-se que submúltiplos menores de m (como $m/4$ por exemplo) não cumprem a condição necessária de número igual de ligações para todos os elementos.

Considerando os múltiplos de m e usando a simetria do sistema, em termos do número total de ligações, obtém-se um conjunto de estados adicionais, com uma configuração de I nulo. É conhecido que o número de configurações distintas dos estados (m, n) e $(m, n_{\max} - n)$ é igual [1][17]:

$$W(m, n) = W(m, n_{\max} - n) \quad (10)$$

Esta simetria resulta do facto que qualquer configuração tem simétrica, obtida de remover as ligações existentes e ligando os pares de elementos previamente desligados. Assim, dois estados simétricos têm número igual de configurações e, como cada

configuração simétrica tem a mesma quantidade de informação, os estados simétricos têm capacidade de armazenamento de informação igual.

Em particular, para cada estado $W(m,n)$ com uma configuração tal que $I = 0$, também há um estado simétrico $W(m,n_{\max}-n)$ com uma configuração $I = 0$. Dependendo de m ser par ou ímpar, esta solução terá, ou não, já sido determinada pela primeira condição.

Pode-se assim estabelecer uma regra geral para determinar todos os estados de um sistema de m elementos com uma configuração tal que sua quantidade de informação seja nula, tendo em conta a paridade de m . Os estados com uma configuração com informação nula são, num sistema de m elementos [16][17]:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall 0 < n_k < \frac{m \cdot (m-1)}{2}: \quad n_k = k \cdot m \wedge n_k = n_{\max} - k \cdot m \quad (11)$$

Quando m par, as soluções obtidas por cada regra não emparelham e devem ser aplicadas ambas. Quando m é ímpar as soluções emparelham e uma só regra é necessária.

É importante provar que nenhum outro estado possa ter uma configuração com informação nula. Tal prova baseia-se no facto que todos os termos são positivos se $q(i)$ é diferente de 0 ou m [17]. Considerando que todos os termos são positivos ou nulos, basta haver um qualquer termo não nulo, para a quantidade total de informação também não ser nula. Assim, qualquer estado além dos já mencionados, não pode ter configurações onde todos os elementos tenham número igual de ligações, donde o resultado.

1.3 Máximos de informação

Determinar os valores de I_{\max} de cada estado, é uma tarefa transcomputational, porque todas as configurações de cada estado teriam que ser geradas. No entanto, é sabido [16][17] que os valores de I_{\max} quase não diferem de um estado ao seu vizinho mais próximo.

Tal deriva do fato que as informações mais altas avaliam configurações possível é esses onde a maioria dos elementos têm um número diferente de ligações de todos os outros elementos (seu impossível para todos os elementos numere de ligações difira).

Para cada estado, I_{\max} ocorre para a configuração onde mais elementos têm número diferente de ligações. De um estado n para o seu mais próximo vizinho $(n+1)$ e

$(n-1)$, I_{\max} não difere significativamente pois cada termo $\left[-\frac{q(i)}{m} \cdot \ln\left(\frac{q(i)}{m}\right) \right]$ será

aproximadamente igual a $\left[-\frac{1}{m} \cdot \ln\left(\frac{1}{m}\right) \right]$ para todo o i . Colocando, ou removendo, uma

ligação de um elemento irá, no máximo, aumentar ou diminuir I de $\left[-\frac{1}{m} \cdot \ln\left(\frac{1}{m}\right) \right]$ e

assim dá-se somente uma pequena variação na quantidade total de informação da configuração, para $m > 10$ (sendo também desprezável para $m < 10$ [16][17]).

Conclui que os valores máximos não são pertinentes na determinação dos máximos relativos da quantidade de informação armazenável, que ocorrem para os estados com $I_{\min} = 0$.

Este facto conduz à conclusão que os estados com máximos relativos de quantidade de informação armazenável surgem descontinuamente, isto é, nunca são primeiros vizinhos num espaço de estados da conectividade [16][17], quer dizer, seguem a regra (11).

Depois de estabelecer os estados máximos relativos de ΔI , segue-se o estudo da entropia termodinâmica de todos os estados de um sistema de m elementos, de modo a se determinarem os estados com necessidade de dissipação de calor mínima.

2. Cálculo da entropia termodinâmica de estados. Condição de entropia mínima.

Determinar a entropia termodinâmica é o modo mais simples de calcular o calor necessário remover para um sistema atingir um certo estado. Usaremos a definição canónica de Boltzmann de entropia termodinâmica. Da fórmula de Boltzmann, a entropia termodinâmica de um sistema de m elementos com n ligações, sendo $W_{(m,n)}$ o número de configurações distintas de um sistema de m elementos e n ligações, é dada por:

$$S_{m,n} = k_b \cdot \text{Ln}(W_{(m,n)}) \quad (12)$$

Erds e Rényi [18] desenvolveram uma fórmula para calcular o número de configurações de cada estado, $W(m,n)$, supondo elementos distintos:

$$W(m,n) = C_n^p, \text{ with } p = C_2^m \quad (13)$$

Esta quantidade é igual ao valor dado por outra expressão [17] por nós estabelecida, mais facilmente aplicável na nossa análise:

$$W(m,n) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{C_2^m - i + 1}{i} \right), \quad n > 0 \quad (14)$$

Considerando (12) e (14), e de acordo com as propriedades da função logaritmo, para um estado (m,n) , a entropia termodinâmica é dada por:

$$\Rightarrow S(m,n) = k_b \cdot \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{C_2^m - i + 1}{i} \right) \right), \quad n \text{ inteiro: } 0 < n < \frac{m \cdot (m-1)}{2} \quad (15)$$

É agora possível estudar a variação da entropia do sistema quando elementos e ligações variarem em quantidade. Supondo um sistema onde são introduzidas ligações novas, para cada nova ligação a entropia termodinâmica variará de acordo com (ignorando a constante de Boltzmann que precisa ser multiplicada ao resultado final):

$$\Delta S = S_{n+1} - S_n = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\ln \left(\frac{C_2^m - i + 1}{i} \right) \right) - \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{C_2^m - i + 1}{i} \right) \right) \quad (16)$$

Operando a diferença, o único termo que não se anula é o correspondente a $i=n+1$:

$$\Rightarrow \Delta S = \ln \left(\frac{C_2^m - n + 2}{n + 1} \right) \quad (17)$$

Então, sempre que uma ligação é adicionada aleatoriamente, a variação de entropia é:

$$\Delta S (n \rightarrow n+1) = \ln \left(\frac{m \cdot (m-1)}{2} - n + 2 \right) - \ln (n+1) \quad (18)$$

Como $S(n=0) = S(n=n_{\max}) = 0$, quando n varia, mantendo m constante, ΔS tem que ter um ponto extremo na sua monotonia, ou seja, onde $dS = 0$. Neste caso, sendo uma função descontínua, $N \rightarrow R$, a condição de extremo pode ser escrita como $\Delta S = 0$. Desta condição e usando a fórmula de n_{\max} , tem-se o número de ligações correspondente:

$$\Delta S = 0 \Rightarrow \ln \left(\frac{m \cdot (m-1)}{2} - n + 2 \right) = \ln (n+1) \quad (19)$$

$$\Rightarrow \frac{m \cdot (m-1)}{2} - n + 2 = n + 1 \quad (20)$$

$$\Rightarrow n = \frac{m^2 - m + 2}{4} \quad (21)$$

Analisando (18) conclui-se que:

$$\text{a) } \Delta S(n \rightarrow n+1) > 0 \quad \text{para } n < \frac{m^2 - m + 2}{4}$$

$$\text{b) } \Delta S(n \rightarrow n+1) = 0 \quad \text{para } n = \frac{m^2 - m + 2}{4}$$

$$\text{c) } \Delta S(n \rightarrow n+1) < 0 \quad \text{para } n > \frac{m^2 - m + 2}{4}$$

Em alguns casos há duas soluções para $\Delta S(n \rightarrow n+1) = 0$ que acontecem sempre que a equação b) tem dois inteiros positivos como soluções possíveis. Se somente uma das soluções for um inteiro positivo, há só uma solução válida, dependendo da paridade de n .

Suponha-se agora um sistema onde ocorre um aumento do número de elementos, m , mantendo o número de ligações, n , constante. De (15):

$$S_{m+1} = \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{C_2^{m+1} - i + 1}{i} \right) \right) \quad (22)$$

Pode-se calcular a variação de entropia devida a um aumento de m:

$$\begin{aligned} \Delta S = S_{m+1} - S_m &= \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{C_2^{m+1} - i + 1}{i} \right) \right) - \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{C_2^m - i + 1}{i} \right) \right) \\ \Rightarrow \Delta S(m \rightarrow m+1) &= \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{(m+1)m}{2} - i + 1 \right) - \ln \left(\frac{m(m-1)}{2} - i + 1 \right) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Desta expressão, tem-se:

- a) $\forall m, n: \left(\frac{m(m-1)}{2} - i + 1 \right) \geq 1$, porque $i_{\max} = \frac{m(m-1)}{2}$
- b) $\forall m, n: \left(\frac{(m+1)m}{2} - i + 1 \right) \geq 1$, porque $i_{\max} = \frac{m(m-1)}{2}$
- c) $\forall i: \ln \left(\frac{(m+1)m}{2} - i + 1 \right) > \ln \left(\frac{m(m-1)}{2} - i + 1 \right)$ porque m é um inteiro positivo.

Conclui-se que, sempre que aumenta o número de elementos, com n constante, a entropia aumenta, ou seja, $\Delta S(m \rightarrow m+1) > 0$, para todo o m.

É agora possível combinar as duas leis de variação. Suponha-se que, para um sistema de m elementos e n ligações, um elemento novo e uma ligação nova é introduzida. De (15):

$$\Rightarrow S_{m+1, n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\ln \left(\frac{C_2^{m+1} - i + 1}{i} \right) \right) \quad (24)$$

A variação causada por esta transformação é dada por:

$$\Delta S = S_{m+1, n+1} - S_{m, n} = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\ln \left(\frac{C_2^{m+1} - i + 1}{i} \right) \right) - \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{C_2^m - i + 1}{i} \right) \right) \quad (25)$$

$$\Rightarrow \Delta S = \ln \left(\frac{m(m-1)}{2} - n \right) - \ln(n+1) + \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{(m+1)m}{2} - i + 1 \right) - \ln \left(\frac{m(m-1)}{2} - i + 1 \right) \right) \quad (26)$$

Esta equação mostra que o efeito de uma variação simultânea de m e n pode ser obtido somando os efeitos causados independentemente por cada uma das variações.

Desta análise, conclui-se que a entropia termodinâmica varia com o número de ligações, isso é, de um estado para outro, de acordo com:

$$\forall k, j \in \mathbb{N}, \forall k \neq j, \forall 0 < n_k, n_j < \frac{m \cdot (m-1)}{2} :$$

$$[n_k < n_j \wedge n_k, n_j < \frac{n_{\max}}{2}] \vee [n_k > n_j \wedge n_k, n_j > \frac{n_{\max}}{2}] \Rightarrow S(m, n_k) > S(m, n_j) \quad (27)$$

De acordo com esta fórmula, a entropia do sistema, nula para $n = 0$ e n_{\max} , aumenta enquanto o número de ligações varia de 0 a metade do número máximo de ligações ($n_{\max}/2$). Além de tal valor, a entropia diminui até que fica nula novamente, quando o número total de ligações é o máximo possível (n_{\max}).

O calor que o sistema tem que dissipar para chegar a um certo estado é então calculável, sabendo a temperatura do sistema (onde nenhum trabalho externo é aplicado), da seguinte relação [19]:

$$Q = T \cdot \Delta S \quad (28)$$

Sistemas vivos requerem um certo intervalo estável de valores de temperatura corporal interna para sobreviver. O mesmo pode ser declarado para qualquer sistema de “processamento de informação” como cérebros orgânicos e processadores electrónicos. O cérebro é um exemplo de tal necessidade. Um imenso fluxo de sangue é necessário para remover o calor produzido devido ao funcionamento do cérebro.

De todos os possíveis estados, os sistemas escolherão os de menor entropia cuja dissipação de calor requerida é mínima, numa determinada vizinhança de estados possíveis. Pode-se então introduzir uma condição de emergência de estados inteligentes: um sistema, entre dois estados, com os mesmos valores em todas as propriedades, adoptará o estado com menor entropia.

Além de dissipar o calor mínimo possível, para um estado ser propício à emergência de inteligência terá que ser um estado de energia interna mínima [17]. Procedemos com a determinação desta condição e a forma de aplicação ao problema de determinar o número de ligações de estados propícios à emergência de inteligência.

3. A condição de energia interna mínima

No modelo do sistema usado, a energia interna, exigida para criar a estrutura do sistema, é uma função exclusiva do número de elementos e ligações:

$$U = U(n, m) \quad (29)$$

Cada ligação e elemento, para ser criado, exigem uma certa quantidade de energia. Então é possível estabelecer relações para calcular a variação de energia interna.

$$dU/dn > 0 \quad (30)$$

$$dU/dm > 0 \quad (31)$$

Redes neuronais biológicas não podem ter um número infinito de neurónios. Associando a cada neurónio uma energia interna, obtém-se uma condição que limita o

número de neurónios. Tal limitação pode, num modelo mais concreto, ser associado aos limites de fluxo de sangue, por exemplo.

O problema de saber a diferença de energia interna de um elemento e uma ligação poderia ser lidado associando uma constante diferente para cada caso. Por razões de simplicidade, embora levando em consideração as leis de variação da energia interna com o número de elementos e ligações, pode-se definir a energia interna de um estado do sistema como:

$$U(m,n) = k_1 \cdot m + k_2 \cdot n \quad (32)$$

Esta aproximação é válida pois distâncias geométricas e propriedades internas dos elementos não são consideradas no modelo. As constantes positivas k_1 e k_2 representam respectivamente, a energia interna para criar um elemento e uma ligação. Porque k_1 e k_2 representam quantidades de energia, devem ser positivas. Então:

$$\frac{\partial U}{\partial m} = k_1 > 0 \quad , \forall m > 0 \quad (33a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = k_2 > 0 \quad , \forall 0 \leq n \leq \frac{m \cdot (m-1)}{2} \quad (33b)$$

Um sistema tem o mesmo número de configurações distintas nos estados (m,n) e $(m, n_{\max} - n)$ e assim, terá a mesma entropia e a mesma informação armazenável. O critério para escolher, de entre estes dois estados, o propício à emergência de inteligência é o critério de energia interna mínima.

Aplicaremos esta condição ao procurar estados propícios à emergência de inteligência declarando que os sistemas, entre dois estados de iguais S e ΔI , adoptam o estado com menor energia interna, sendo que a variação da energia interna em função do número de ligações pode ser descrita por:

$$\forall k,j \in N, \forall k \neq j, \forall 0 < n_k, n_j < \frac{m \cdot (m-1)}{2} : n_k > n_j \Rightarrow U(m, n_k) > U(m, n_j) \quad (34)$$

Sendo as propriedades simétricas, $S(n_k) = S(n_{\max} - n_k)$ e $\Delta I(n_k) = \Delta I(n_{\max} - n_k)$, concluímos que somente estados do intervalo $n \leq n_{\max}/2$, podem ser propícios à emergência de inteligência. Assim, a condição de energia interna mínima, em termos do número de ligações, pode ser declarada como:

$$n \leq \frac{n_{\max}}{2} \quad (35)$$

Somos agora capazes de criar um algoritmo capaz de determinar, sabendo o número total do sistema de elementos, os estados propícios à emergência de inteligência em termos do número total de ligações, de acordo com as três condições necessárias (embora não suficientes).

4. Algoritmo para determinar estados propícios para à emergência de inteligência

Sistemas com elevado número de elementos têm uma quantidade transcomputacional de configurações [20][21][22]. Então, não é possível calcular quais estados são propícios à emergência de inteligência da miríade de possíveis estados.

Num sistema de m elementos distintos, o número de possíveis configurações é $2^{\frac{m(m-1)}{2}}$. O uso de um algoritmo para determinar estados propícios à emergência de inteligência em sistemas com $m \gg 1$ é, então, uma necessidade. Usando a definição de estado propício num vizinhança de estados, um algoritmo foi desenvolvido e permite determinar tais estados sem a necessidade para gerar todas suas possíveis configurações.

Para um sistema estar num estado de propício à emergência de inteligência tem que ter, simultaneamente, quantidade máxima de informação armazenável, energia interna mínima e dissipação de calor mínima. Em termos do número de ligações, estas condições são:

I. Condição de máximo ΔI : Para qualquer sistema de m elementos, os máximos locais de ΔI ocorrem para n_k ligações tais que:

$$\forall k \in N, \forall 0 < n_k < \frac{m \cdot (m-1)}{2} : \quad n_k = k \cdot m \wedge n_k = n_{\max} - k \cdot m \quad (36)$$

II. Condição de entropia mínima: Entre duas configurações de igual ΔI , o propício à emergência de inteligência é o de menor entropia:

$$\forall k, j \in N, \forall k \neq j, \forall 0 < n_k, n_j < m \cdot (m-1)/2 : \\ [n_k < n_j \wedge n_k, n_j < n_{\max}/2] \vee [n_k > n_j \wedge n_k, n_j > n_{\max}/2] \Rightarrow S(m, n_k) > S(m, n_j) \quad (37)$$

Poderíamos introduzir um limite, tal que se $S(m, n_k) > S_{\max}$ então (m, n_k) não seria uma solução possível. O valor de S_{\max} seria determinado de restrições físicas conhecidas, dependendo de características específicas dos sistemas.

III. Condição de energia interna mínima: De dois estados de igual ΔI e S , o propício à emergência de inteligência é o de menor energia interna:

$$\forall k, j \in N, k \neq j, \forall 0 < n_k, n_j < m \cdot (m-1)/2 : n_k > n_j \Rightarrow U(m, n_k) > U(m, n_j) \quad (38)$$

Desta condição, estados propícios à emergência de inteligência possuem:

$$n \leq \frac{n_{\max}}{2} \quad (39)$$

Esta condição (39) é uma consequência de (38), mas é mais fácil aplicar. Um limite também poderia ser imposto: se $U(m, n_k) > U_{\max}$ então (m, n_k) não seria uma solução possível.

Note-se que, ao impor a maximização da quantidade de informação armazenável, resulta uma condição de conectividade mínima [23][24]. O primeiro estado propício à emergência de inteligência acontece quando:

$$\begin{aligned} n_{k=1} &= m && \text{se } m \text{ ímpar} \\ n_{k=1} &= m/2 && \text{se } m \text{ par.} \end{aligned}$$

Então, $n \geq m/2$, o que corresponde a uma conectividade de 0,5. A condição ($n \geq m/2$) poderia resultar da necessidade de uma transição de fase dos elementos do sistema para um “agrupamento” gigante, devido a ligações aleatoriamente introduzidas, o que já está implícito na condição de maximização da quantidade de informação armazenável.

Estas condições permitem, para qualquer sistema de m elementos, a determinação do conjunto de estados propícios à emergência de inteligência. As condições são necessárias, contudo, não suficientes, e assim, deste conjunto, só alguns estados serão propícios.

Mais, nenhuma escolha pode ser feita, do conjunto de estados propícios, quanto a qual o “ótimo” de entre eles. Tal não é devido a uma falta de condições do algoritmo mas por limitações de computação em sistemas onde $m \gg 1$ [20][21].

Note que, das condições, nenhuma restrição é obtida para o número de elementos, assim conclui-se que estas serão principalmente físicas, ou seja, os sistemas terão o máximo número possível, limitados pela capacidade de os suportar e espaço de confinamento.

A capacidade do algoritmo para prever estados propícios à emergência de inteligência deve ser testada através da comparação com os estados adoptados por redes neuronais biológicas. Sendo que estas são o resultado de um processo muito longo de evolução, sustentamos que se encontram em estados propícios à emergência de inteligência. A concordância entre teoria e observação valida o algoritmo.

Para este teste escolheram-se o cérebro Humano e o sistema nervoso da *C. Elegans*. O primeiro é o mais complexo e o segundo é o mais simples de todos os sistemas neuronais conhecidos na Natureza. O segundo também é o melhor conhecido actualmente, e, em particular, é o único cuja estrutura, todos os neurónios e ligações, é conhecida de modo quase absoluto.

5. Validação do modelo

Começamos por aplicar o algoritmo em modelos de sistemas com poucos elementos. Para $m < 10$, é possível criar um programa capaz de gerar todas as possíveis configurações calculando, para cada configuração, a sua quantidade relativista de informação, e, para cada estado, a sua entropia, energia interna e quantidade de informação armazenável.

Os estados obtidos usando o algoritmo são exactamente os máximos relativos de ($\Delta I/S$) obtidos gerando todas as configurações possíveis. A condição de energia interna foi usada para escolher, entre esses, os de menor energia interna. Um acordo total entre dados experimentais e predições do algoritmo foi observado [16]. Este procedimento não é possível para sistemas com número grande de elementos pois se torna um problema transcomputacional [20][21].

Fomos em seguida comparar os dados experimentais dos sistemas neuronais da *C. Elegans* e do cérebro Humano, com as soluções obtidas pelo algoritmo para modelos com um número de elementos igual aos neurónios de cada um dos sistemas reais. O único parâmetro necessário introduzir no algoritmo é o número exacto de elementos encontrado nesses sistemas, ou seja, neurónios.

5.1 Sistema nervoso da *C. Elegans*

O sistema nervoso da *C. Elegans* é o melhor conhecido sistema nervoso biológico, sendo o melhor teste possível da validade do algoritmo. A sua estrutura é exactamente a mesma para todos os hermafroditas [25][26][27].

Construímos um modelo do sistema nervoso, considerando os neurónios como elementos e todas as sinapses e “junções” como ligações.

Devido à natureza distinta destes dois tipos de ligações e a independência no funcionamento, são considerados dois sistemas separados: o sistema de junções e o sistema de sinapses [26].

As interações entre o corpo e sistema nervoso não foram consideradas porque não são ligações entre neurónios. Além disso, só uma ligação de uma determinada natureza (por exemplo, sinapse), no máximo, é contada, entre dois neurónios. Uma ligação de um neurónio para ele próprio é desprezada. Finalmente, todos os dados referem-se às ligações de 282 neurónios [26], pois nenhum mapa de ligações está disponível para os 20 neurónios da “pharyngeal”. É possível obter uma matriz de ligações para o sistema de junções:

i	q(i)	Informação
0	88	0.156046807
1	65	0.143579745
2	65	0.143579745
3	41	0.117735585
4	25	0.089575077
5	7	0.037895239
6	2	0.014430311
7	2	0.014430311
8	3	0.019896215
9	1	0.008211944
10	2	0.014430311
11	1	0.008211944
Total	Neurónios	Informação
302 (214 com Junções)		0.768023235

Tabela 1: Número de elementos com i ligações ($q(i)$) e a quantidade de informação correspondente do estado. Sistema de junções.

Dos 302 neurónios, 88 têm nenhuma junção e consideraremos que não fazem parte do sistema, assim, só 214 neurónios são considerados para esta rede. Somente 543 junções existem, em 22791 possíveis ligações, i.e., 2%, o que está de acordo com as condições de entropia e energia interna mínimas.

Do sistema de sinapses só fazem parte 241 neurónios, com um total de 2280 ligações.

Total	Neurónios	Informação Total
	241	2.154334
i	q(i)	Informação
0	61	0
1	23	0.148206
2	29	0.156772
3	24	0.150077
5	13	0.116977
6	17	0.132551
7	24	0.150077
8	15	0.125363
9	8	0.089376
10	13	0.116977
11	11	0.107208
12	11	0.107208
13	7	0.082389
14	5	0.066382
15	7	0.082389
16	4	0.057102
17	7	0.082389
18	6	0.07476
21	2	0.034758
22	2	0.034758
23	3	0.04669
24	2	0.034758
27	3	0.04669
30	1	0.020482
34	2	0.034758
39	2	0.034758
96	1	0.020482

Tabela 2-Número de elementos com i ligações (q(i)) e a quantidade correspondente de informação do estado. Sistema de sinapses.

Existem 2280 sinapses, 8% do número máximo possível, 28920. Novamente há um acordo com as condições de entropia e energia interna mínimas.

Para aplicar o algoritmo ao sistema de junções introduzimos o número de neurónios, 214, possuidores das 543 junções.

I. Condição de máximo ΔI : Para o sistema de junções da C. Elegans hermafrodita tem-se:

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \forall 0 < n_k < 22791: \quad n_k = k \cdot 214 \quad \wedge \quad n_k = 22791 - k \cdot 214 \quad (40)$$

As soluções mais próximas do valor real são, respectivamente, da primeira e segunda condições:

$$i) k = 2 \text{ e } k = 3 \Rightarrow n_{k=2} = 428 \text{ e } n_{k=3} = 642 \Rightarrow 428 < n_{\text{real}} = 543 < 642 \quad (41a)$$

$$ii) k=103 \text{ e } k=104 \Rightarrow n_{k=103} = 749 \text{ e } n_{k=104} = 535 \Rightarrow 535 < n_{\text{real}} = 543 < 749 \quad (41b)$$

A proximidade entre a solução obtida usando $k = 103$, que implica 535 ligações e o valor real, 543, é evidente.

II. Condição de entropia mínima: O número de configurações possíveis no estado $n = 543$ é determinado por: $W(m = 302, n = 543) = C_n^p$, com $p = C_2^m$.

De relação de Boltzmann e as propriedades da função logarítmica:

$$S = K_B \cdot [\text{Log}(45451!) - \text{Log}(44908!) - \text{Log}(543!)] \quad (42)$$

Um valor aproximado é obtido usando a aproximação de Stirling para números grandes [28], contudo, esta aplicação depende de calcular o exacto valor de ΔI para todos os estados, tarefa essa que é transcomputacional. Não obstante, verifica-se que esta condição é respeitada pois só 2% das possíveis ligações existem, o que corresponde a um estado de relativamente baixa entropia.

III. Condição de energia interna mínima: Desta condição, obtém-se o máximo valor possível do número total de ligações de estados propícios. Neste caso:

$$n < \frac{n_{\text{max}}}{2} = 11395,5$$

$$\text{Sendo } n \text{ um inteiro: } n \leq 11396 \quad (43)$$

Então, o estado adoptado pelo sistema de junções da C. Elegans está dentro dos estados determinados como propícios à emergência de inteligência pelo algoritmo. Combinando todas as condições, o conjunto de soluções para o sistema de junções é:

$$n \leq 11396 \wedge n_k = k \cdot 214 \wedge n_k = 22791 - k \cdot 214 \quad k \text{ inteiro positivo} \quad (44)$$

O estado real, do sistema de junções, é $n = 543$, pelo que são respeitadas todas as condições, e, na realidade, uma das soluções ($k = 103 \Rightarrow n = 535$), é muito próxima da solução real adoptada.

Ao considerar o sistema de sinapses, introduz-se o número total de elementos como parâmetro no algoritmo. Para um total de 302 neurónios, 241 têm sinapses. Aplica-se somente a condição $n = m \cdot k$, do algoritmo (pois o número total de elementos é ímpar):

I. Condição de máximo ΔI : Para o sistema de sinapses da C. Elegans hermafrodita tem:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall 0 < n_k < 28920: n_k = k \cdot 241 \wedge n_k = 28920 - k \cdot 241 \quad (45)$$

As soluções mais próximas do valor real são, da primeira condição:

$$\text{Para } k = 9 \text{ e } k = 10 \Rightarrow n_{k=9} = 2169 \quad \text{e} \quad n_{k=10} = 2410$$

$$\Rightarrow 2169 < n_{\text{real}} = 2280 < 2410 \quad (46a)$$

A solução mais próxima é $k = 9$.

II. Condição de entropia mínima

Como o estado adoptado é $n = 2280$, e há 28920 possíveis estados onde somente 8% têm mais baixa entropia que o escolhido, conclui-se que o estado real é um estado relativamente baixo de entropia.

III. Condição de energia interna mínima: De $n_{\text{real}} = 2280 < 14460$, esta condição também é respeitada.

Combinando todas as condições, o conjunto de soluções de estados propícios à emergência de inteligência para o sistema de sinapses é:

$$n < 14460 \quad \wedge \quad n = k \cdot 241, k \text{ inteiro positivo} \quad (47)$$

Há uma boa aproximação entre as soluções do algoritmo e os valores reais. O algoritmo provou ser capaz de determinar, dentro de um certo grau de aproximação, estados propícios à emergência de inteligência para os sistemas de sinapses e junções.

Um certo intervalo de erro era esperado. Quer porque o algoritmo só tem condições necessárias à emergência de inteligência, e não condições suficientes, pois não são consideradas propriedades físicas específicas dos sistemas, quer porque os dados experimentais do sistema nervoso da *C. Elegans* não são completos [26]. Verifica-se, pois, que o algoritmo e o modelo possuem uma boa aderência à realidade.

5.2 O cérebro humano

Aplicamos agora o algoritmo a um sistema cujo número de elementos é igual ao número médio de neurónios do cérebro humano. O uso de valores médios é, neste caso, inevitável, pois nenhum cérebro humano é completamente semelhante a outro e é deste modo que os dados são apresentados na literatura [29][30][31].

O cérebro humano tem, em média, 10^{11} neurónios, 10^{15} sinapses e 10^4 sinapses por neurónio [29][30][31]. Impondo tal número de elementos ao algoritmo e, aplicando as condições, obtém-se todos os estados propícios à emergência de inteligência.

I. Condição de máximo ΔI : No modelo do cérebro humano: $m = 10^{11}$.

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \forall 0 < n_k < \frac{10^{11} \cdot (10^{11} - 1)}{2} : n_k = k \cdot 10^{11} \wedge n_k = \frac{10^{11} \cdot (10^{11} - 1)}{2} - k \cdot 10^{11}$$

Usando a aproximação, $10^{11} - 1 \cong 10^{11}$, tem-se:

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \forall 0 < n_k < 5 \cdot 10^{21} : n_k = k \cdot 10^{11} \wedge n_k = 5 \cdot 10^{21} - k \cdot 10^{11} \quad (48)$$

O conjunto de soluções é:

i) Os estados para os quais ΔI é um máximo local são: $n_k = 0, 10^{11}, 2 \cdot 10^{11}, 3 \cdot 10^{11}, \dots, 10^{15}, \dots, 5 \cdot 10^{21}$.

ii) As soluções dadas pela segunda condição são coincidentes e assim só a primeira condição é necessária. Note-se que o estado, $n = 10^{15}$, é uma das soluções. Há um valor k positivo tal que:

$$10^{15} = k \cdot 10^{11} \Rightarrow k = 10^4 \ll k_{\max} = 10^{11} \quad (49)$$

II. Condição de entropia mínima: O número total de ligações é muito menor que o número total de ligações possíveis, e assim respeita a condição. Aproximadamente, somente $10^{-5}\%$ das possíveis ligações existem, sendo este um relativamente baixo estado de entropia.

III. Condição de energia interna mínima: O estado real está claramente abaixo do limite $n = \frac{n_{\max}}{2}$, e assim respeita a condição.

Combinando todas as condições, o conjunto de soluções, é:

$$n \leq 2 \cdot 10^{21} \quad \wedge \quad n = k \cdot 10^{11}, k \text{ inteiro positivo} \quad (50)$$

Como o sistema real está no estado $n = 10^{15}$, confirma-se a solução obtida pelo algoritmo.

Conclusões

Combinando as condições de máxima capacidade de armazenamento de informação relativista, necessidade de energia interna mínima e mínimo calor dissipado, obtém-se um conjunto de condições capazes de estabelecer, dado o número total de elementos, todos os estados propícios à emergência de inteligência.

O algoritmo, quando aplicado a um modelo de um sistema de m elementos, supera, em parte, o problema transcomputacional de calcular todas as variáveis que caracterizam cada estado.

Para testar a validade do algoritmo, aplicou-se a modelos, representando somente propriedades constitutivas de redes nervosas biológicas, nomeadamente do cérebro Humano e do sistema nervoso da *C. Elegans*.

O algoritmo obteve as soluções reais adoptadas, com uma pequena margem de erro, para os sistemas de sinapses e de junções da *C. Elegans* e para o cérebro Humano.

Assim, concluímos que o algoritmo é capaz de determinar estados propícios à emergência de inteligência.

A introdução de especificidades dos sistemas neuronais no modelo permitirá obter um conjunto menor de estados propícios. Não obstante, observando o conjunto de estados

propícios nos casos práticos e no caso geral, fica estabelecido que sistemas inteligentes não podem evoluir através de mudanças estruturais mínimas mas antes por “saltos” no espaço de estados do sistema.

Referências

- [1] André S. Ribeiro, F. Carvalho Rodrigues, “Criteria for systems intelligence”, in preparation.
- [2] Holland, John H. *Hidden Order: How Adaptation Builds Complexity*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1995.
- [3] Holland, John H. *Emergence: From Chaos to Order*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1998.
- [4] Von Bertalanffy, Ludwig (1973) *General System Theory* (Harmondsworth: Penguin Books).
- [5] Jumarie, Guy M., “Subjectivity, Information, Systems, An introduction to a theory of relativistic cybernetics”, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1986
- [6] Coren, R. L. Empirical Evidence for a Law of Information Growth. *Entropy* **2001**, 3, 259-273.
- [7] Jonathan D.H. Smith, “Some Observations on the Concepts of Information-Theoretic Entropy and Randomness”, *Entropy*, ISSN 1099-4300, www.mdpi.org/entropy/
- [8] Application of information entropy to defect characterization in leather”, *Journal of the Society of Leather Technologists Chemists*, **75**, 10; F. Carvalho Rodrigues, D. Fernando Carvalho, J. Pinto Peixoto, M. Santos Silva, Victor Silvestre.
- [9] Carvalho Rodrigues, F., 1989. “A proposed entropy measure for assessing combat degradation”, *J. Opl. Res. Soc. (UK)*, **40** (8): 789-93.
- [10] Carvalho Rodrigues, F., Dockery, J. and Rodrigues, T., 1993b, “Entropy of Plagues: A Measure Assessing the Loss of social Cohesion Due to Epidemics”, *European J. of Operational Research*, **71**, 45-60.
- [11] “Quantidade de Informação na Arquitectura Portuguesa” F. Carvalho Rodrigues, Carlos A. M. Duarte, André S. Ribeiro, Tessaleno C. Devezas, Comunicação apresentada na Academia de Ciências de Lisboa, aceite para publicação em *Idade da Imagem*, nº2, Lisboa 2001.
- [12] “Análise Relativista da Quantidade de Informação para Avaliação de Comportamentos Emergentes no Design”, Carlos Alberto M. Duarte, PhD Thesis (2001)
- [13] H. J. Bremermann, “Complexity and transcomputability”, in *The Encyclopedia of Ignorance*, M. Duncan, ed. Pergamon Press, Oxford (1977).
- [14] H. J. Bremermann, “Quantum-theoretical Limitations of Data Processing, *Abstracts of Short Communications*, International Congress of Mathematics, Stockholm (1962).
- [15] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication”, *Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 379-423 and 623-656, July and October, 1948.
- [16] “Cálculo do Consumo Energético e Capacidade de Armazenamento de Informação em Sistemas Complexos”, F. Carvalho Rodrigues, André S. Ribeiro, *Proceedings Física 2002*.
- [17] “Estados Propícios à Emergência de Inteligência em Sistemas”, André S. Ribeiro, PhD Thesis, 2003.
- [18] P. Erdos and A. Rényi, On the evolution of random graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* 5 (1960), 17-61.
- [19] Zemansky, Mark W., Dittman, RH, “Heat and Thermodynamics” McGraw-Hill, Physics Series, 6th edition.
- [20] H. J. Bremermann, “Complexity and transcomputability”, in *The Encyclopedia of Ignorance*, M. Duncan, ed. Pergamon Press, Oxford (1977).
- [21] H. J. Bremermann, “Minimum Energy Requirements of Information Transfer and Computing”, *Int. J. Theoretical Physics*, 21(3-4):203-17 (April, 1982).
- [22] H. J. Bremermann, “Complexity of automata, brains and behavior”, in *Physics and Mathematics of the Nervous System*, M. Conrad, W. Guttinger, and M. Dal Cin (eds.), *Biomathematics Lecture Notes*, Vol. 4. Springer, Heidelberg (1974), p 304-331. [Nat. Sci. QP355.2.585]
- [23] Kauffman S. A. *At Home in the Universe: The Search for Laws of Self-Organization and Complexity*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [24] P. Erdos and A. Rényi, On the evolution of random graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* 5 (1960), 17-61.
- [25] White, J. G., Southgate, E., Thomson, J. N. and Brenner, S. (1986). “The structure of the nervous system of *Caenorhabditis Elegans*”. *Phil. Trans. R.Soc. Lond.* B 314, 1-340.

- [26] Achacoso, T., and Yamamoto, W. (1992) *AY's Neuroanatomy of C. Elegans for computation*, Boca Raton, FL: CRC.
- [27] Richard M. Durbin "Studies on the Development and Organization of the Nervous System of *C. Elegans*", thesis. <http://www.wormbase.org/papers/durbinv1.2/>
- [28] D.E. Knuth, *The art of computer programming: Seminumerical algorithms*, Volume 2, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Reading MA
- [29] <http://faculty.washington.edu/chudler/facts.html#brain>
- [30] Kalat, J.W., *Biological Psychology*, 6th Edition, 1998, page 24
- [31] Gershon, M.D., "The Second Brain", HarperPerennial, 1999.

Capítulo 3

Estratégias dos sistemas para atingir estados propícios à emergência de inteligência

Resumo

Conhecendo as condições para um estado ser propício à emergência de inteligência [1][2][3][4], determinamos todos esses estados para um sistema com m elementos e é calculada a probabilidade de um sistema escolher, aleatoriamente, entre todos os possíveis estados, um estado propício. Concluimos que este evento, se totalmente aleatório, se torna cada vez menos provável quando o número de elementos aumenta, embora seja uma ocorrência longe de impossível.

A difusão natural de ligações num sistema de m elementos, conduzindo a um aumento de informação relativista e responsável por uma transição de fase, i.e. o aparecimento de uma nova estrutura, é a força motriz para atingir estados propícios à emergência de inteligência, de máxima capacidade de armazenamento de informação. Tal difusão está limitada pelas condições de mínima dissipação de calor e de energia interna mínima.

Palavras-chave: Emergência de inteligência, Difusão de interações.

1. Introdução

Tendo estabelecido as condições para um estado ser propício à emergência de inteligência [2], analisa-se o modo como os sistemas alcançam tais estados.

Do capítulo anterior sabe-se que estes estados são os adoptados por sistemas neuronais biológicos, e surgem devido a um processo de evolução. Determinando todos os possíveis estados propícios à emergência de inteligência de um sistema, calcula-se a probabilidade de um sistema escolher, aleatoriamente, entre todos os possíveis estados, um propício à emergência de inteligência. Concluímos que este não é um evento provável, embora não seja “impossível”, i.e., a probabilidade tem um valor que não pode ser considerado nulo.

Não obstante, quando o número de elementos do sistema cresce, tal probabilidade diminui, e assim, procuramos mecanismos que levem os sistemas a adoptar estados propícios à emergência de inteligência que não o aleatório.

Sendo que tais estados distribuem-se escassamente no espaço de fases do sistema, sempre separados entre si por um certo número de estados, conclui-se que qualquer processo de evolução deve ser descontínuo, ocorrendo através de “saltos” de uma vizinhança de estados para outra, e escolhendo, dentro de cada vizinhança, o estado propício à emergência de inteligência.

Uma força motriz que leva o sistema a adoptar estados propícios forçando a adição de ligações até um estado de equilíbrio ser alcançado. Tal força é a difusão natural de ligações em sistemas de elementos com capacidade de interacção entre si. O equilíbrio deve ocorrer antes dos limites de capacidade de dissipação de calor e quantidade de energia interna do sistema serem alcançados.

A capacidade de armazenamento de informação relativista [3] de um estado, uma medida da inteligência do sistema, deve ser máxima num estado propício, sendo usada como o parâmetro de escolha do estado propício dentro de uma vizinhança de estados.

Estas condições gerais, combinadas com as limitações específicas de sistemas reais poderão permitir a determinação da vizinhança provável de estados onde o sistema estará em equilíbrio.

Não obstante, sistemas complexos são conhecidos pela sua habilidade para exhibir muitos “comportamentos inesperados” e adoptar muitas soluções, pelo que não esperamos reduzir o conjunto de soluções satisfatórias a uma só solução.

Começamos por estabelecer que emergência e transição de fase são sinónimos e causados por um processo de difusão de interacções, i.e., por um processo de maximização da quantidade relativista de informação.

2. Processo de difusão de interacções como causa de emergência e transição de fase

Provou-se [5][6][7][8] que quando $p(i)$, que representa a probabilidade de uma mensagem “ i ” sobre a estrutura do sistema alcançar o valor $1/e$ (onde e é a constante de Nepper), a estrutura de sistema sofre uma transição de fase. Tal é a razão por que uma transição de fase é observada quando são colocadas ligações aleatoriamente num sistema de elementos inicialmente desligados [9][10][11].

Para provar esta afirmação relacionamos o valor da conectividade e da quantidade de informação, necessária para ocorrer uma transição de fase. Da condição de

maximização da quantidade de informação relativista obtém-se a conectividade mínima para uma transição de fase.

A quantidade de informação relativista é máxima para $p = 1/e$. Para que, num sistema de m elementos, se tenha a probabilidade de dois elementos terem uma ligação igual a $(1/e)$, têm que existir (m/e) ligações, pois cada ligação liga dois elementos. Assim, neste caso, tem-se a conectividade:

$$\Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{\binom{m}{e}}{m} = \frac{1}{e} \cong \frac{1}{2} \quad (1)$$

Note-se que 0.5 é maior que $(1/e)$, mas a taxa de difusão mais elevada ocorre para:

$$p = 1/e \quad (2)$$

Em grafos a transição de fase ocorre quando a conectividade é $1/2$. Tal é uma consequência de não ser possível para um grafo com m elementos ter (m/e) ligações, pois esta não é uma quantidade inteira. Não obstante, $(1/e)$ é o valor exacto num processo de difusão, embora num grafo se possa considerar aquele valor como $1/2$.

Assim, a conectividade necessária para a qual a transição de fase ocorre, i.e., o aparecimento de um comportamento novo [12], é alcançado quando a quantidade relativista de informação atinge o valor máximo. Concluimos que a explicação para a emergência de inteligência em sistemas como redes neuronais biológicas, reside na variação da informação relativista. Então, esta variação pode ser usada como uma medida da inteligência da estrutura do sistema, sendo então necessário quantificar esta variável, para cada possível estado de um sistema.

3. Estados propícios à emergência de inteligência

É possível medir um aumento em organização pela diminuição da entropia termodinâmica, o que é equivalente a um aumento de informação. Nestes processos, a entropia deve, necessariamente, seja expelida para o exterior, tal como foi mostrado por Prigogine [13][14].

A variação de informação relativista de um estado é mensurável pelo intervalo de valores da informação de tal estado, e, os estados com os maiores intervalos de informação serão propícios à emergência de inteligência, pois são os com maior número de bits disponíveis para calcular. Assim, sustentamos que, quanto mais elevada é esta variação, mais inteligente o sistema se torna.

Definimos um sistema como propício à emergência de inteligência se este se encontra num estado capaz de armazenar uma quantidade de informação máxima, exigindo para tal um consumo mínimo de energia, dentro de uma vizinhança de estados. Sendo U a energia necessária para criar o sistema e Q o calor por ele dissipado, estas condições podem ser declaradas por [1][2]:

$$(I_{\max} - I_{\min}) \text{ máximo} \quad (3)$$

$$U \text{ mínimo} \quad (4)$$

$$Q \text{ m\u00ednimo} \tag{5}$$

A quantidade de informa\u00e7\u00e3o que corresponde a cada configura\u00e7\u00e3o ser\u00e1 obtida da equa\u00e7\u00e3o de Shannon [15] com, no nosso caso, $\sigma(i)$ representando o n\u00famero de elementos com i liga\u00e7\u00f5es, num universo de m elementos.

N\u00e3o calculamos todas as mensagens poss\u00edveis de enviar pelo sistema. Apenas consideramos as mensagens relativas ao n\u00famero de liga\u00e7\u00f5es de cada elemento. Assim, usamos uma quantidade relativista de informa\u00e7\u00e3o no sentido em que a quantidade de informa\u00e7\u00e3o das mensagens depende de nosso crit\u00e9rio como observadores [16].

Num sistema de m elementos e n liga\u00e7\u00f5es numa certa distribui\u00e7\u00e3o, tem-se:

$$I(m,n) = - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\sigma(i)}{m} \cdot \ln \left(\frac{\sigma(i)}{m} \right) \tag{6}$$

Agora pode-se estabelecer uma medida do n\u00famero de mensagens distintas, em termos do intervalo de valores de informa\u00e7\u00e3o permitido, que um estado \u00e9 capaz de receber ou enviar. Para isso definimos a quantidade de armazen\u00e1vel relativista de informa\u00e7\u00e3o [3]:

$$\Delta I = I_{\max} - I_{\min} \tag{7}$$

Esta quantidade ter\u00e1 um comportamento bastante imprevis\u00edvel, com a varia\u00e7\u00e3o de n . Os m\u00e1ximos relativos corresponder\u00e3o a estados prop\u00edcios \u00e0 emerg\u00eancia de intelig\u00eancia (se as condi\u00e7\u00f5es de energia de m\u00ednima estiverem satisfeitas) pois, nesses estados, o sistema pode receber e armazenar um n\u00famero m\u00e1ximo de mensagens distintas, numa certa vizinhan\u00e7a de estados.

A energia interna U \u00e9 fun\u00e7\u00e3o do n\u00famero de elementos e liga\u00e7\u00f5es pois esses s\u00e3o os \u00fanicos componentes do sistema. Note-se que o comprimento de tais liga\u00e7\u00f5es n\u00e3o \u00e9 pertinente pois, no modelo de sistema aqui usado, n\u00e3o \u00e9 relevante a localiza\u00e7\u00e3o espacial de elementos ou liga\u00e7\u00f5es.

$$U = U(m,n) \quad \text{tal que: } U \propto n, m, \tag{8}$$

Para n\u00f3s, o facto relevante \u00e9 que a energia interna aumenta quando o n\u00famero de liga\u00e7\u00f5es aumenta.

A entropia termodin\u00e2mica \u00e9 uma medida do calor dissipado pelo sistema num certo estado, sabendo a temperatura, pela rela\u00e7\u00e3o:

$$Q = T \cdot \Delta S \tag{9}$$

Para calcular a entropia de cada estado usa-se a equa\u00e7\u00e3o de Boltzmann (sendo que W representa o n\u00famero de configura\u00e7\u00f5es que suportam o estado (m,n)):

$$S(m,n) = k_b \cdot \log [W(m,n)] \tag{10}$$

Desta condição podem-se determinar estados propícios, em termos do seu número total de ligações. Mais, não é necessário gerar as configurações de cada estado, o que seria uma tarefa transcomputacional [17].

4. Número de ligações dos estados propícios à emergência de inteligência

Em trabalhos prévios [1][2][3][4] foi determinado o número de ligações, n , para os quais os valores de informação armazenável são máximos relativos num sistema de m elementos, e as leis de variação da entropia, S , e energia interna, U , com n :

A) Os máximos locais de ΔI ocorrem quando o número de ligações é dado por:

$$\forall k \in N, \forall 0 < n_k < \frac{m \cdot (m - 1)}{2} : \quad n_k = k \cdot m \wedge n_k = n_{\max} - k \cdot m \quad (11)$$

B) Entre dois estados de igual ΔI , o propício é o de menor entropia, tal que:

$$\forall k, j \in N, \forall k \neq j, \forall 0 < n_k, n_j < \frac{m \cdot (m - 1)}{2} :$$

$$[n_k < n_j \wedge n_k, n_j < \frac{n_{\max}}{2}] \vee [n_k > n_j \wedge n_k, n_j > \frac{n_{\max}}{2}] \Rightarrow S(m, n_k) > S(m, n_j) \quad (12)$$

C) De dois estados de igual ΔI , o estado propício é o de menor energia interna:

$$\forall k, j \in N, k \neq j, \forall 0 < n_k, n_j < \frac{m \cdot (m - 1)}{2} : \quad n_k > n_j \Rightarrow U(m, n_k) > U(m, n_j) \quad (13)$$

Da condição A, verifica-se que quaisquer dois estados propícios à emergência de inteligência estão separados por, pelo menos, $(m/2)$ estados (i.e. ligações) no espaço de estados. Então, o processo de evolução terá de se dar através de “saltos” no espaço de estados.

Não obstante, isto não invalida uma análise que supõe adição sucessiva de ligações (uma a uma) pois os resultados obtidos são válidos para qualquer processo de adição aleatória de ligações ($m/2$ em $m/2$ ligações, por exemplo).

Destas condições, o número de estados propícios à emergência de inteligência é calculável, sabendo-se o número total de elementos do sistema.

5. Número de estados propícios (#Opt) num sistema de m elementos.

A probabilidade de escolher um estado aleatoriamente, e obter um propício à emergência de inteligência é calculável do número de estados propícios e do número total de estados de um sistema de m elementos.

Por definição de estado, cada sistema tem $(n_{\max} + 1)$ possíveis estados. Para um sistema de m elementos, o número máximo de ligações do sistema é, supondo só uma ligação possível entre qualquer par de elementos, dado por:

$$n_{\max} = \frac{m \cdot (m - 1)}{2} \quad (14)$$

De acordo com a condição de maximização de ΔI , os valores máximos ocorrem para n tais que:

$$n_k = m \cdot k \quad (15a)$$

$$\text{e/ou} \quad n_k = n_{\max} - m \cdot k \quad (15b)$$

Com, $0 < n < \frac{m \cdot (m - 1)}{2}$, e em que k representa um inteiro positivo, respeitando as condições limite de n . Os casos $n = 0$ e $n = n_{\max}$, são removidos pois ΔI é nulo nesses casos.

Usando as equações (15a) e (15b), os limites de k são obtidos. Substituindo n por n_{\max} em (15a), k^* é obtido.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad n_{\max} &= m \cdot k^* \\ \Rightarrow \quad k^* &= \frac{\frac{m \cdot (m - 1)}{2}}{m} \quad \Rightarrow \quad k^* = \frac{m - 1}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

Porque $n < n_{\max}$, k_{\max} é determinado subtraindo 1 a k^* , obtendo-se o valor máximo possível de k (k_{\max}):

$$\Rightarrow \quad k_{\max} = k^* - 1 = \frac{m - 1}{2} - 1 \quad (17)$$

Este é o valor máximo que k pode adoptar para ambas condições (15a) e (15b). Cada condição dará k_{\max} soluções. Então, obteremos $2 \cdot k_{\max}$ soluções.

Considerando que algumas soluções são repetidas, o número total de soluções diminuirá. O problema é determinar quantas soluções (de 15a e 15b) serão iguais e então, representam o mesmo estado. A paridade do número total de elementos do sistema deve ser levada em conta.

A. Número de estados propícios para m par

Começamos provando que, para um sistema com um número par de elementos, as soluções das condições (15a) e (15b) nunca coincidem, pelo que o número de estados propícios será a soma das soluções das duas condições.

Num sistema de m elementos, com m par, as soluções de n_k , das condições (15a) e (15b) nunca coincidem para qualquer valor possível de k , ou seja:

$$m \text{ par: } \forall m, k_i, k_j \in \mathbb{N}, \quad 0 < k_i, k_j < \frac{m - 1}{2} : m \cdot k_i \neq n_{\max} - m \cdot k_j \quad (18)$$

Podemos provar (18) provando que a expressão oposta é impossível. Suponha-se que a declaração seguinte é verdadeira para m par:

$$\exists m, k_i, k_j \in \mathbb{N}, \quad 0 < k_i, k_j < \frac{m-1}{2} : m.k_i = n_{\max} - m.k_j \quad (19)$$

De (19), usando a equação (14):

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad m.k_i &= \frac{m.(m-1)}{2} - m.k_j \\ \Rightarrow \quad k_i + k_j &= \frac{m-1}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

Agora, como k_i e k_j são inteiros, então $(k_i + k_j)$ também é um inteiro. Mas, se m é par então $(m-1)$ é ímpar, então:

$$\text{Se m par, } \frac{m-1}{2} \text{ não é um inteiro.} \quad (21)$$

É impossível ter um inteiro igual a um número não inteiro, pelo que a equação (21) é falsa para todo o m, k_i , k_j . Concluimos que (18) é sempre verdade, para m par.

Disto concluimos que as soluções para estados propícios das duas condições (15a) e (15b) nunca coincidem e, então, o número total de soluções é determinado pela soma das soluções de cada condição. Mas o facto de k ser um inteiro deve ser considerado novamente. Da condição (15a) temos:

$$\begin{aligned} n_k = m.k < n_{\max} \quad \Rightarrow \quad m.k_{\max} < \frac{m.(m-1)}{2} \\ \Rightarrow \quad k_{\max} < \frac{m-1}{2} \end{aligned}$$

Então, k_{\max} será igual ao maior inteiro, menor que $[(m-1)/2]$. como m é par, $(m/2)$ é inteiro: $k_{\max} < \frac{m}{2} - 1/2$. O maior inteiro, menor que tal quantidade, é obtido subtraindo $(1/2)$:

$$\Rightarrow \quad k_{\max} = \frac{m}{2} - 1/2 - 1/2 \quad (22)$$

$$\Rightarrow \quad k_{\max} = \frac{m-2}{2} \quad , \text{ para m par} \quad (23)$$

Mostra-se que k_{\max} é igual, usando a condição (15b). Pelo que há duas condições (15a e 15b), cada uma com k_{\max} soluções, e segue-se que o número de estados propícios para sistemas em que m é par ($\#Opt(m \text{ par})$) é dado por:

$$\begin{aligned} \#Opt(m \text{ par}) &= 2.k_{\max} \\ \Rightarrow \#Opt(m \text{ par}) &= m-2 \end{aligned} \quad (24)$$

Sem levar a condição de energia interna em conta, este resultado está em acordo total com as observações de sistemas com poucos elementos, onde é possível conferir quais estados são propícios, calculando a entropia, energia interna e informação armazenável de cada estado.

B. Número de estados propícios para m ímpar

Num sistema de m elementos, com m ímpar, as soluções de n_k , das condições (15a) e (15b) coincidem sempre para qualquer valor de k :

$$m \text{ ímpar: } \forall m, k_i \in \mathbb{N}, \exists! k_j \in \mathbb{N}, 0 < k_i, k_j < \frac{m-1}{2} : m.k_i = n_{\max} - m.k_j \quad (25)$$

Comparando com o caso prévio, uma condição extra é necessária para $n_{\max}/2$, porque para m ímpar, em alguns casos, esta é uma quantidade inteira.

A condição (25) é verdade se a cada $(m.k_i)$ corresponde um e um só, valor igual $(n_{\max} - m.k_j)$. De (16):

$$\begin{aligned} m.k_i &= \frac{m.(m-1)}{2} - m.k_j \\ \Rightarrow k_i + k_j &= \frac{m-1}{2} \end{aligned} \quad (26)$$

Tem que se provar que (26) sempre tem uma e uma só solução, tendo a definição de k_i e k_j em conta. Das condições limite de k tem-se:

$$0 < k_i, k_j < (m-1)/2 \Rightarrow 1 \leq k_i, k_j \leq \frac{m-1}{2} - 1, \forall k_i, k_j \in \mathbb{N}$$

A equação (26) é verdadeira quando, e só quando, a equação seguinte é verdadeira:

$$k_j = \frac{m-1}{2} - k_i \quad (27)$$

Esta equação tem sempre solução dentro dos intervalos de valores de k_i e k_j . A cada k_i existe um, e um só, k_j correspondente, que torna (27) verdadeira. Note-se que

porque m é ímpar, então $(m-1)$ é par, pelo que $\frac{m-1}{2}$ é um inteiro. Podemos concluir que, para m ímpar:

$$m \text{ ímpar: } \forall m, k_i \in \mathbb{N}, \exists^1 k_j \in \mathbb{N}, 0 < k_i, k_j < \frac{m-1}{2} : m \cdot k_i = n_{\max} - m \cdot k_j \quad (28)$$

Logo, o número de estados propícios, sem considerar a condição de energia interna, é, para m ímpar:

$$\Rightarrow \#Opt(m \text{ ímpar}) = \frac{m-1}{2} - 1 \quad (29)$$

Este resultado também está em acordo total com as observações de sistemas com poucos elementos.

É agora possível analisar o efeito da aplicação condição de energia interna.

C. A condição de energia interna

A condição de energia interna implica que:

$$\forall k, j \in \mathbb{N}, \forall k \neq j, \forall 0 < n_k, n_j < \frac{m \cdot (m-1)}{2} : n_k > n_j \Rightarrow U(m, n_k) > U(m, n_j) \quad (30)$$

Note-se que os sistemas são simétricos no sentido em que todas as configurações em $n < \frac{n_{\max}}{2}$, serão “repetidas” para $n > \frac{n_{\max}}{2}$, substituindo ligações por nenhuma ligação e colocando ligações onde não havia nenhuma. Como consequência, estes estados simétricos terão a mesma quantidade de informação armazenável e entropia.

Por isso concluímos que a aplicação da condição de energia interna mínima, leva a que soluções satisfatórias nunca terão mais que $\frac{n_{\max}}{2}$ ligações. Então, podemos impor a condição seguinte para um estado ser propício:

$$(m, n_k) \text{ é propício se, e só se, } n_k \leq \frac{n_{\max}}{2} \quad (31)$$

O número de estados propícios será reduzido aproximadamente metade do número obtido em (24) e (29). O caso $n = \frac{n_{\max}}{2}$ será considerado separadamente.

Começamos por determinar as consequências da condição de energia interna quando m é par.

Note-se que, se m é par, $n = \frac{n_{\max}}{2}$, não é um estado propício, o que pode ser provado por absurdo. Se $n = \frac{n_{\max}}{2}$ é um estado propício do sistema, então é possível escrever um dos dois possíveis casos:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{n_{\max}}{2} &= m.k \\ \frac{m.(m-1)}{2} &= m.k & \Rightarrow & \frac{m-1}{4} = k \end{aligned}$$

Se m é par, então $(m-1)$ é ímpar e k não é um inteiro. Porque k tem que ser inteiro, $n = n_{\max}/2$ não é um estado propício do sistema.

Da segunda condição:

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{n_{\max}}{2} &= n_{\max} - m.k \\ \Rightarrow -n_{\max} + \frac{n_{\max}}{2} &= -m.k & \Rightarrow & \frac{n_{\max}}{2} = m.k \end{aligned}$$

Este caso é equivalente ao anterior, pois também não há nenhum inteiro k solução da equação. Deste raciocínio é possível concluir que o número total de estados propícios não depende do caso $n = \frac{n_{\max}}{2}$ e, quando m par, ao introduzir a condição de energia interna mínima, reduz-se o número de estados propícios a metade:

$$n \leq n_{\max}/2 \Rightarrow \#Opt(m \text{ par}) = \frac{m-2}{2} \quad (32)$$

De modo a obter as consequências da condição de energia interna mínima em sistemas com m ímpar segue-se o mesmo método.

Note-se que se m é ímpar, $n = n_{\max}/2$, é um estado propício se, e só se, m é um múltiplo de 4. Isto é verdade porque, se $n = n_{\max}/2$ é um estado propício do sistema, então é possível escrever um de dois casos possíveis:

$$\text{a) } n_{\max}/2 = m.k \quad \Rightarrow \quad \frac{m.(m-1)}{2} = m.k \quad \Rightarrow \quad \frac{m-1}{4} = k$$

Como m é ímpar, $(m-1)$ é par, e k é um inteiro se e só se $(m-1)$ é múltiplo de 4. Sendo que k tem que ser inteiro conclui-se que $n = n_{\max}/2$ é um estado propício do sistema quando:

$(m, n = n_{\max}/2)$ é propício se: $\exists p \in \mathbb{N}: 4.p = m-1$

Da segunda condição temos:

$$b) \quad n_{\max}/2 = n_{\max} - m.k \quad \Rightarrow \quad -n_{\max} + \frac{n_{\max}}{2} = -m.k \quad \Rightarrow \quad \frac{n_{\max}}{2} = m.k$$

Este caso é equivalente ao caso anterior e a mesma conclusão segue-se. Assim, o número total de estados propícios depende do caso $n = n_{\max}/2$ somente quando $(m-1)$ é um múltiplo de 4 e, introduzindo a condição de energia, o número de estados propícios só será reduzido para metade quando é a condição b) que se verifica:

$$a) \text{ Se } (m-1) = 4.p \quad \Rightarrow \quad \frac{n_{\max}}{2} \text{ é um estado propício}$$

$$b) \text{ Se } (m-1) \neq 4.p \quad \Rightarrow \quad \frac{n_{\max}}{2} \text{ não é um estado propício}$$

Quando $(m-1)$ é um múltiplo de 4, então o caso $n = n_{\max}/2$, tem que contar como um estado propício.

De (29), e se $(n_{\max}/2)$ é um estado propício, então o número de estados propícios será ímpar, e assim, ao dividir por 2, resulta um número não inteiro. Para levar o estado $(n_{\max}/2)$ em conta, $1/2$ deve ser acrescentado ao número de estados propícios.

Então, se p representa um inteiro, e se m for ímpar, o número de estados propícios será dado por:

$$\text{Para } n \leq \frac{n_{\max}}{2} : \text{ Se } (m-1) = 4.p \Rightarrow \#Opt(m \text{ ímpar}) = \frac{m-1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad (33a)$$

$$\text{Para } n \leq \frac{n_{\max}}{2} : \text{ Se } (m-1) \neq 4.p \Rightarrow \#Opt(m \text{ ímpar}) = \frac{m-1}{4} - \frac{1}{2} \quad (33b)$$

Finalmente, de (29), (33a) e (33b), a regra completa para o número de estados propícios de um sistema de m elementos, é, sendo p um inteiro:

$$\#Opt(m \text{ ímpar}) = \frac{m-1}{4}, \quad \text{se } (m-1) = 4.p \quad (34a)$$

$$\#Opt(m \text{ ímpar}) = \frac{m-1}{4} - \frac{1}{2}, \quad \text{se } (m-1) \neq 4.p \quad (34b)$$

$$\#Opt(m \text{ par}) = \frac{m-2}{2} \quad (34c)$$

Com estas equações é agora possível obter a probabilidade de um sistema de m elementos adoptar um estado propício à emergência de inteligência aleatoriamente.

5. Probabilidade do sistema adoptar um estado propício aleatoriamente

A probabilidade de um sistema, com um número aleatório de ligações, estar num estado propício, é determinada por (excluindo os casos $n = 0$ e n_{\max} , e porque

$$0 < n < \frac{m \cdot (m - 1)}{2} :$$

$$\% \text{ Opt} = \frac{\# \text{ Opt}}{n_{\max} - 1} \quad (35)$$

Então, de (34a, b e c), as probabilidades de ocorrência de um estado propício, para um sistema de m elementos, escolhendo qualquer estado ao acaso, são, sendo p um inteiro:

$$\text{m par:} \quad \% \text{ Opt} = \frac{\frac{m-2}{2}}{n_{\max} - 1} \cdot 100\% \quad (36a)$$

$$\text{m ímpar} \wedge (m-1) = 4p: \quad \% \text{ Opt} = \frac{\frac{m-1}{4}}{n_{\max} - 1} \cdot 100\% \quad (36b)$$

$$\text{m ímpar} \wedge (m-1) \neq 4p: \quad \% \text{ Opt} = \frac{\frac{m-1}{4} - \frac{1}{2}}{n_{\max} - 1} \cdot 100\% \quad (36c)$$

Quanto mais elementos possuir um sistema, menor é a probabilidade. Diminui aproximadamente de acordo com a lei de variação ($1/m$). A diferença entre os três casos tenderá a desaparecer para sistemas onde $m \gg 1$.

No entanto, os estados propícios são, na realidade, os estados adoptados pelos sistemas biológicos [2]. Então, o processo de como os sistemas atingem tais estados propícios à emergência de inteligência deve ser analisado.

6. Processos para atingir estados propícios à emergência de inteligência

A estrutura, que determina as propriedades do sistema, é definida pelas ligações entre elementos. O processo de introdução de ligações entre elementos é, então, o responsável pelo sistema atingir estados propícios.

Este processo, de aumento de interacções entre elementos esparsamente ligados de um sistema, é um processo de difusão e corresponde a um aumento da quantidade relativista de informação do sistema.

Shannon [15], ao calcular a entropia da probabilidade de ocorrência de eventos designou-a por quantidade de informação do sistema e provou que o grau de ordem em qualquer sistema pode ser medido através da função de distribuição das mensagens enviadas pelo sistema, a entropia de informação, independentemente da natureza das mensagens e interacções.

Quando são consideradas só certas mensagens sobre o sistema, a quantidade de informação torna-se uma medida relativista. No modelo aqui usado só se consideram pertinentes as informações sobre o número de ligações de cada elemento.

Foi mostrado [5][6] que a estrutura de um sistema só é compatível com o valor de informação relativista até um certo valor máximo, $p(i) = 1/e$. Ao alcançar tal valor, mudanças estruturais acontecem.

Assim, a variação da informação relativista é a causa da emergência de novas estruturas e, portanto, pelo aparecimento de novos comportamentos, quando o sistema está sujeito à penetração de interações entre os elementos.

As variações de informação e de entropia são formalmente iguais mas medem fenómenos e grandezas diferentes.

A variação da informação é responsável por mudanças de estrutura num sistema, sendo a variação da entropia uma medida da energia necessária para essas transformações acontecerem ou para o sistema adquirir um estado de equilíbrio, agindo como uma força no sistema. Tais forças são designadas por forças entrópicas, existindo exemplos em várias áreas [18 a 27].

Uma força entrópica causa, por exemplo, a difusão de elementos em soluções químicas, diminuindo os diferenciais de concentração. Um aumento da entropia do sistema é o resultado, no equilíbrio.

Há exemplos de fenómenos onde certas “áreas” do sistema se tornam mais ordenadas, i.e., onde ocorrem diminuições de entropia devido a esta força.

O caso da "prisão entrópica" de uma partícula grande, num meio com várias partículas menores, é um exemplo. Neste caso, ordem emerge da desordem porque a entropia do sistema é devida essencialmente às partículas pequenas. A aproximação da partícula grande às esferas pequenas ou paredes do recipiente determina o volume do qual as partículas pequenas são excluídas.

7. Processos de auto-assemblagem

Processos de auto-assemblagem de estruturas biológicas são exemplos bem conhecidos de processos dirigidos pela variação de entropia. Estes processos são responsáveis por gerar estruturas mais ordenadas, exportando entropia para o exterior.

A auto-assemblagem é um exemplo de um processo de auto-organização espontânea, onde o aumento de organização não é controlado pelo ambiente ou outra força externa mas devido às propriedades intrínsecas do sistema. Não obstante, embora a energia do sistema varie devido às forças entrópicas, a variação de informação é a responsável pelas mudanças estruturais em sistemas e, assim, a emergência de inteligência é um processo dirigido pela variação da informação.

8. Processos dirigidos pela variação de informação

A variação de informação relativista possível, num sistema num certo estado, é mensurável pela amplitude do intervalo de todos os possíveis valores de informação.

Num modelo de sistema que consiste somente em elementos e ligações, cada valor de informação corresponde a uma configuração distinta de ligações de um estado.

Os estados com amplitudes superiores são os propícios à emergência de inteligência, pois possuem quantidades maiores de *bits* disponíveis para computação.

Supomos que, quanto maior esta quantidade, mais inteligente o sistema é.

A variação da quantidade total de informação relativista num sistema onde uma difusão de processo de interações ocorreu, ou ocorre, é obtida usando (6).

Note-se que, devido ao processo de adição de ligações, a entropia aumenta, de acordo com (10), enquanto $n < n_{\max}/2$. Considerando que sistemas possuem capacidade de dissipação de calor limitada, este aumento limitará o estabelecimento de interações.

Tal processo de adição de ligações permite sistemas para passar por todos os estados. Quando a informação alcança o valor $(1/e)$, uma transição de fase acontece. Com este processo, o sistema chegará eventualmente a estados de máximos relativos de ΔI .

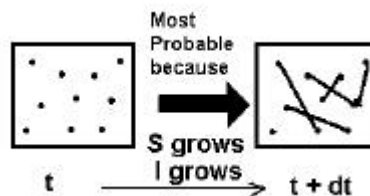


Figura 1– Processo controlado pela variação de entropia, causando a difusão de interações. Devido à variação da informação, uma mudança estrutural ocorre: emerge um conjunto contendo quase todos os elementos.

A vizinhança de estados escolhida resulta das limitações na capacidade do sistema de acumular energia para sustentar o sistema de processamento de informação, a capacidade de dissipação de calor, e a necessidade de maximização da informação armazenável.

Por exemplo, nos humanos, a função de dissipação de calor é executada pelo sistema de irrigação (fluxo de sangue), limitada pelo tamanho do pescoço e veias, necessárias para transportar o sangue ao cérebro. O tamanho do coração para bombear tal sangue limita também a capacidade de dissipação de calor. Ainda outra limitação é o tamanho do crânio [29].

Conclusões

Usando um modelo geral de sistemas baseado em interações e não nas propriedades internas dos elementos [28] provou-se que o número de estados propícios à emergência de inteligência, tal como foi aqui definida, é tal que este evento é improvável mas está longe de ser “impossível”.

Mais, identificou-se um processo que conduz os sistemas a estados propícios à emergência de inteligência. A variação de informação e entropia agem como forças motrizes do processo de difusão que conduz ao aumento do número de interações, sendo este processo limitado pela energia interna disponível e capacidade de dissipação de calor. Dentro da vizinhança de estados assim alcançada, os estados propícios à emergência de inteligência são os de capacidade de armazenamento de informação máxima.

Referências

- [1] Andre S. Ribeiro, F. Carvalho Rodrigues, "Criteria for systems intelligence", submitted for publication.
- [2] Andre S. Ribeiro, F. Carvalho Rodrigues, "The emergence of intelligence in a system", submitted for publication.
- [3] "Cálculo do Consumo Energético e Capacidade de Armazenamento de Informação em Sistemas Complexos", F. Carvalho Rodrigues, André S. Ribeiro, Setembro de 2002, Conferencia Nacional de Física 2002, Portugal.
- [4] "The Cost in Energy and in Time of the Intelligence", F. Carvalho Rodrigues, André S. Ribeiro, Scientific Annals of Unl, Vol 2, no. 3, Winter 2001
- [5] Carvalho Rodrigues, F., Dockery, J., 1996, "Defining Systems Based on Information Exchange: Structure from Dynamics", *BioSystems* **38**,229-234.
- [6] Carvalho Rodrigues, F.,1990/1991, "Função de Coesão de Estruturas baseadas em Informação", *Memórias da Academia, TOMO XXXI, Academia das Ciências de Lisboa*.
- [7] Carvalho Rodrigues, F., Dockery, J. and Rodrigues, T., 1993b, "Entropy of Plagues: A Measure Assessing the Loss of social Cohesion Due to Epidemics", *Euro. J. Operational Research*,**71**,45-60.
- [8] Carvalho Rodrigues, F.,1989. "A proposed entropy measure for assessing combat degradation", *J. Opl.Res.Soc.(UK)*, **40** (8): 789-93.
- [9] "Investigations", Kauffman, S. A., Oxford University Press, 2000.
- [10] "At Home in the Universe", Kauffman, S. A., Oxford U. Press, 1995.
- [11] P. Erdos and A. Rényi, On the evolution of random graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5** (1960), 17-61
- [12] "Hidden Order", J. Holland, Addison Wesley, 1995.
- [13] Prigogine I., Paul Glansdorff (1971), *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*, Wiley, New York
- [14] Prigogine I., Isabelle Stengers (1984), *Order out of Chaos*, Bantam, New York (trad. it. *La nuova alleanza*, Einaudi, Torino 1981
- [15] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication", *Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 379-423 and 623-656, July and October, 1948.
- [16] Jumarie, Guy M., "Subjectivity, Information, Systems, An introduction to a theory of relativistic cybernetics", Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1986.
- [17] H. J. Bremermann, "Complexity and transcomputability", in *The Encyclopedia of Ignorance*, M. Duncan, ed. Pergamon Press, Oxford (1977).
- [18] "Hard Spheres in Vesicles: Curvature-Induced Forces and Particle-Induced Curvature", by A.D. Dinsmore, D.T. Wong, Philip Nelson, A.G. Yodh; *Phys. Rev. Lett.* **80**, 409 (1998).
- [19] <http://www.che.utexas.edu/~truskett/research1.htm>
- [20] "Entrópicaally driven self-assembly of multichannel rosette nanotubes", Hicham Fenniri, Bo-Liang Deng, Alexander E. Ribbe, Klaas Hallenga, Jaby Jacob and P. Thiagarajan, <http://www.pubmedcentral.nih.gov/>
- [21] S. Asakura and F. Oosawa, *J. Polym. Sci* **33**, 183 (1958).
- [22] Y. Mao, M. E. Cates, and H. N. W. Lekkerkerker, *Physica A* **222**, 10 (1995).
- [23] R. Dickman, P. Attard, and V. Simonian, *J. Chem. Phys.* **107**, 205 (1997).
- [24] D. S. Corti and H. Reiss, *Mol. Phys.* **95**, 269.
- [25] T. M. Truskett, *Second Proposition*, Princeton University (1999).
- [26] J. C. Crocker, J. A. Matteo, A. D. Dinsmore, and A. D. Yodh, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4352 (1998).
- [27] Dinsmore, Yodh, Pine. *Nature* **383**, 239, (1996).
- [28] Von Bertalanffy, Ludwig (1973) *General System Theory* (Harmondsworth: Penguin Books).
- [29] Carlo Ranzi, "Homo há Setenta Milhões de Anos", Distri Editora, Lisboa, 1983.

Capítulo 4

Sistemas mundos pequenos não são necessariamente propícios à emergência de inteligência

Resumo

Da observação que alguns sistemas neuronais biológicos e outros sistemas onde elementos trocam informação entre si, adoptam estruturas mundo pequeno, fomos verificar se os sistemas inteligentes são sempre mundos pequenos. Para tal ser verdade, a estrutura mundo pequeno deve resultar das condições de emergência de inteligência [1 a 5] em sistemas.

Após determinar o conjunto de todos estados propícios à emergência de inteligência em sistemas de m elementos, fomos verificar quais destes são estruturas mundo pequeno [6][7], i.e., para cada estado propício, o coeficiente de agrupamento correspondente e grau de separação [8][9] foram calculados.

Destes cálculos determinaram-se quais estados, propícios à emergência de inteligência podem adoptar configurações mundo pequeno.

Palavras-chave: Emergência de Inteligência, Mundo pequeno.

1. Introdução

A teoria dos grafos mundos pequenos foi desenvolvida para representar um caso especial de sistemas, com muitos elementos e interações, distribuídas principalmente de um modo regular, mas com uma elevada taxa de transferência de informação entre todos os elementos, devido ao baixo valor do grau de separação médio, sendo as poucas ligações aleatórias por tal responsáveis.

Inicialmente, a estrutura de mundos pequenos foi observada em redes sociais por Stanley Milgram [6] e Mark S. Granovetter [7], no âmbito da sociologia, e posteriormente foi desenvolvida usando conceitos da teoria dos grafos.

Tais estruturas revelaram características de grafos regulares, como um coeficiente de agrupamento elevado, sendo simultaneamente capazes de representar praticamente qualquer grau de aleatoriedade de uma distribuição de ligações [10] pelos elementos de um sistema.

A distribuição aleatória de ligações provou ser a estrutura cujo grau de separação médio entre os elementos do sistema é o menor possível [11 a 14]. A estrutura mundo pequeno também é capaz de exibir uma elevada taxa de transmissão de informação entre elementos, devido ao pequeno número médio de ligações necessárias percorrer entre cada par de elementos.

Esta estrutura está presente no sistema nervoso da *C. Elegans* [15 a 21] e é amplamente observada em outras redes neuronais biológicas, bem como em outros sistemas de várias naturezas [22 a 34] onde elementos interagem entre si.

Destes factos, perguntámos se os sistemas inteligentes são, necessariamente, mundos pequenos. Para responder a esta pergunta foram calculados o grau de separação médio ($\langle L \rangle$), e o coeficiente de agrupamento médio ($\langle C(p) \rangle$), bem como a conectividade dos estados propícios à emergência de inteligência, o que permite verificar se, sendo um estado propício, também será, necessariamente, um mundo pequeno.

Assim, começamos por rever sucintamente as características de estruturas mundo pequeno e apresentar as relações para obter $\langle L \rangle$ e $\langle C(p) \rangle$.

2. A estrutura mundo pequeno

O algoritmo usualmente utilizado para gerar estruturas mundo pequeno foi apresentado por Watts e Strogatz [8]. Vários outros algoritmos, capazes de gerar mundos pequenos foram estudados e muitas aplicações [35] propostas.

As estruturas mundo pequeno são caracterizadas por um baixo grau de separação médio, à imagem das redes aleatórias, mas também por um coeficiente de agrupamento elevado, tal como em grafos regulares [8].

Dados dois locais (elementos do sistema) ξ e η , o menor percurso entre eles, L_{ij} é dado pelo menor número de ligações percorridas para um sinal de ξ alcançar η . O grau de separação médio (que define o “tamanho” do grafo) é calculado pela média dos tamanhos de todos os percursos. Se m for o número total de elementos, o grau de separação médio é determinado por [8][36]:

$$\langle L \rangle = \sum_{i,j} \frac{L_{ij}}{C_2^m} \quad (1)$$

Suponha um grafo de m elementos e n ligações onde, em média, cada elemento é ligado aleatoriamente a k outros elementos (onde k é o número médio de ligações dos elementos do sistema, i.e., $2n/m$). Se cada elemento tem, em média, k ligações, podem-se alcançar k elementos distintos, com um único “passo” (uma ligação) a partir de cada elemento. Em geral, com j passos, começando num elemento podem-se alcançar k^j elementos, donde a característica “Lei da Potência” observada nestas estruturas [25][29].

Então, para um sinal emitido por um elemento, alcançar todos os m elementos do grafo, com $m = k^l$, precisa-se, em média $\langle L \rangle$ passos, dados por:

$$\langle L \rangle \approx \frac{\text{Log}(m)}{\text{Log}(k)} \quad (2)$$

Esta relação é válida, com um certo grau de aproximação, quer para grafos mundos pequenos [22] quer para aleatórios. O grau de separação médio tem sempre um valor menor para grafos aleatórios que para grafos regulares ou semi-regulares (supondo igual número de elementos e ligações em ambos os casos).

A topologia proposta por Watts e Strogatz [8] permite ao grafo variar de regular (para p , a probabilidade para transformar uma ligação regular em aleatória, nula) para uma estrutura totalmente aleatória (para $p = 1$). Para valores pequenos de p , uma estrutura quase regular é obtida com somente algumas ligações aleatórias. Estas ligações podem ser vistas como “defeitos” na regularidade dos grafos.

Para quantificar estes defeitos, Watts e Strogatz definiram um coeficiente de agrupamento, $C(p)$ que mede, para todo o elemento s_i , quantos dos seus mais próximos vizinhos também são primeiros vizinhos entre si [8].

O coeficiente de agrupamento, $C(p)$, pode ser obtido [8][37][38] sabendo a estrutura de ligações. Para um elemento i , o seu coeficiente de agrupamento C_i é dado por uma relação entre o número de ligações existentes entre os seus vizinhos de 1ª ordem e, E_i , o número máximo de ligações possíveis entre esses vizinhos: $[k_i \cdot (k_i - 1) / 2]$. Um sistema tem um coeficiente de agrupamento dado pela média de todos os elementos:

$$C(p) = \langle C_i \rangle_i = \left\langle \frac{2 \cdot E_i}{k_i \cdot (k_i - 1)} \right\rangle_i \quad (3)$$

Para uma distribuição aleatória de ligações de um sistema de m elementos, tal quantidade, é aproximadamente [39]:

$$C_{\text{rand}} = \frac{\langle k \rangle}{m} \quad (4)$$

Watts e Strogatz declararam que uma densidade pequena p de ligações “de longo alcance” eram suficientes para reduzir $\langle L(p) \rangle$ significativamente, aproximando-se de modo “assimptótico” do valor máximo (em $p = 1$), correspondente a grafos aleatórios.

Por outro lado, para quase todos os possíveis valores de p , $C(p)$ fica praticamente constante, sofrendo uma diminuição rápida quando o valor de p se aproxima de 1. Assim,

concluiu-se [8] que sistemas com estruturas mundo pequeno têm, para valores intermédios de p , características típicas de estruturas aleatórias, i.e., comunicação rápida entre todos os elementos ($\langle L \rangle_{SW} \approx \langle L \rangle_{random}$) e um coeficiente de agrupamento elevado ($C_{SW} > C_{random}$), típico de estruturas regulares.

Considerando que algumas redes neuronais biológicas exibem estruturas mundo pequeno, perguntámos se os sistemas inteligentes seriam, necessariamente, mundos pequenos. Para tal ser verdade, os estados propícios à emergência de inteligência que agora definimos, têm que implicar estruturas mundo pequeno.

3. Estados propícios à emergência de inteligência

Definimos um sistema como propício à emergência de inteligência se este se encontra num estado capaz de armazenar uma quantidade de informação máxima, exigindo para tal um consumo mínimo de energia, dentro de uma vizinhança de estados. Sendo U a energia necessária para criar o sistema e Q o calor por ele dissipado, estas condições podem ser declaradas por [1][2]:

$$(I_{max} - I_{min}) \text{ máximo} \quad (5)$$

$$U \text{ mínimo} \quad (6)$$

$$Q \text{ mínimo} \quad (7)$$

A quantidade de informação que corresponde a cada configuração será obtida da equação de Shannon [15] com, no nosso caso, $\sigma(i)$ representando o número de elementos com i ligações, num universo de m elementos.

Não calculamos todas as mensagens possíveis enviar pelo sistema. Apenas estamos interessados em receber as mensagens relativas ao número de ligações de cada elemento. Assim, usamos uma quantidade relativista de informação no sentido em que a quantidade de informação das mensagens depende de nosso critério como observadores [16].

Num sistema de m elementos, n ligações e uma certa distribuição dessas ligações:

$$I(m,n) = - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\sigma(i)}{m} \cdot \ln \left(\frac{\sigma(i)}{m} \right) \quad (8)$$

Agora pode-se estabelecer uma medida do número de mensagens distintas, em termos do intervalo de valores de informação permitido, que um estado é capaz de receber ou enviar. Para isso definimos a quantidade de informação relativista armazenável [3]:

$$\Delta I = I_{max} - I_{min} \quad (8)$$

Os máximos relativos corresponderão a estados propícios à emergência de inteligência (se as condições de energia de mínima estão satisfeitas) pois, nesses estados, o sistema pode receber e armazenar um número máximo de mensagens distintas, dentro de uma certa vizinhança de estados.

A energia interna U , será função do número de elementos e ligações pois esses são os únicos componentes do sistema. Note que o comprimento de tais ligações não é pertinente pois, no modelo de sistema aqui usado, não é relevante a localização espacial de elementos ou ligações.

$$U = U(m,n) \quad \text{tal que: } U \propto n, m, \quad (10)$$

Para nós, o facto relevante é que a energia interna aumenta quando o número de ligações aumenta.

A entropia termodinâmica será a medida do calor dissipado pelo sistema num certo estado, sabendo a temperatura de sistema, da relação:

$$Q = T. \Delta S \quad (11)$$

Para calcular a entropia de cada estado usa-se a equação de Boltzmann (sendo que W representa o número de configurações que suportam o estado (m,n)):

$$S(m,n) = k_b \cdot \log [W(m,n)] \quad (12)$$

Das condições de estados propícios à emergência de inteligência (5)(6)(7) pode-se determinar todos estes estados, em termos do seu número total de ligações, para qualquer sistema de m elementos. Mais, não é necessário gerar todas as configurações, o que seria uma tarefa transcomputational [47].

Foram determinados os estados cujos valores de informação de armazenável são máximos e as leis de variação da entropia e energia interna com o número de ligações:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall 0 < n_k < \frac{m \cdot (m - 1)}{2} : \quad n_k = k \cdot m \quad (13a)$$

$$\wedge \quad n_k = n_{\max} - k \cdot m \quad (13b)$$

Entre dois estados de igual ΔI , o propício é o de menor entropia, tal que:

$$\forall k, j \in \mathbb{N}, \forall k \neq j, \forall 0 < n_k, n_j < \frac{m \cdot (m - 1)}{2} :$$

$$[n_k < n_j \wedge n_k, n_j < \frac{n_{\max}}{2}] \vee [n_k > n_j \wedge n_k, n_j > \frac{n_{\max}}{2}] \Rightarrow S(m, n_k) > S(m, n_j) \quad (14)$$

Finalmente, de dois estados de igual ΔI e S , o estado propício é o de menor energia interna:

$$\forall k, j \in \mathbb{N}, k \neq j, \forall 0 < n_k, n_j < \frac{m \cdot (m - 1)}{2} : n_k > n_j \Rightarrow U(m, n_k) > U(m, n_j) \quad (15)$$

Um valor de limite, U_{\max} , também poderia ser imposto, de condições externas ou características particulares do sistema, como: Se $U(m, n_k) > U_{\max}$ então (m, n_k) não seria uma solução possível.

É agora possível determinar se estes estados são mundos pequenos. Para tal temos que calcular o grau de separação médio e coeficiente de agrupamento.

4. Cálculo do grau de separação médio de estados propício à emergência de inteligência

Do número total de ligações de estados propícios à emergência de inteligência, e a sua conectividade, pode-se calcular o grau de separação médio correspondente. Tal cálculo supõe uma distribuição aproximadamente uniforme de ligações. Usando as condições (13a) e (15) de estados propícios:

$$n_p = m.p \quad \text{onde } p \text{ é um inteiro tal que: } \quad 1 \leq p \leq \frac{(m-1)}{4} \quad (16)$$

Para uma distribuição aproximadamente aleatória de ligações, num sistema de m elementos, se k é o número médio das n ligações por elemento, i.e, o dobro da conectividade, tem-se [24]:

$$L = \frac{\log(m)}{\log(k)} \quad \text{com} \quad k = 2 \cdot \frac{n}{m} \quad (17)$$

Assim, para estados propícios à emergência de inteligência, de (16):

$$\Rightarrow L = \frac{\log(m)}{\log(2.p)} \quad p \text{ inteiro:} \quad 1 \leq p \leq \frac{(m-1)}{4} \quad (18)$$

Podem-se obter os valores extremos de L , introduzindo os valores extremos de p :

$$\Rightarrow \frac{\log(m)}{\log\left(\frac{m-1}{2}\right)} \leq L \leq \frac{\log(m)}{\log(2)} \quad (19)$$

$$\text{Para } m \gg 1 \Rightarrow \frac{m-1}{2} \approx \frac{m}{2} \Rightarrow \frac{\log(m)}{\log\left(\frac{m}{2}\right)} \leq L \leq \frac{\log(m)}{\log(2)} \quad (20)$$

$$\text{Assim: } \frac{\log(m)}{\log(m) - \log(2)} \leq L \leq \log_2(m) \quad (21)$$

Como $m \gg 1$, então $\log(m) \gg \log(2)$, assim, embora tendo em conta a aproximação, substituindo a condição extrema ($L \geq 1$) por ($L > 1$), tem-se:

$$\Rightarrow 1 < L \leq \log_2(m) \quad (22)$$

Note-se que o grau de separação tem valores finitos, somente se os estados propícios tiverem $n \geq m$. Para que L tenha um valor pequeno, i.e., menor que 7 [24], a quantidade (2.p) deve ser, pelo menos, igual a $(\sqrt[6]{m})$. Substituindo (2.p) por este valor em (17) tem-se $L=6$. Em geral, para $2.p = \sqrt[j]{m}$, com j inteiro positivo, obtém-se estruturas com $L = j$. Note-se que p é a conectividade, e assim temos uma relação directa entre conectividade e grau de separação.

Para que um estado propício à emergência de inteligência seja um mundo pequeno, p deve ser maior que 0,5. Este também é o valor mínimo de conectividade preciso para a ocorrência de uma transição de fase de um grupo de elementos pouco unidos, para um grupo de elementos que pertencem a um mesmo agrupamento [10].

Em geral, podemos calcular quantas ligações são necessárias para que um sistema, num estado propício à emergência de inteligência, tenha um grau de separação médio de um determinado valor. Como o número de ligações do sistema, n , é igual a $(m.p)$ (de 13a), e se sabe que para $2.p = \sqrt[L]{m}$, o grau de separação é L , resulta que para um sistema ter um grau de separação L , o número total de ligações necessário é:

$$\Rightarrow n = \left(\frac{m}{2}\right)^{L\sqrt{m}} \quad (23)$$

Assim tem-se as ligações necessárias dadas como uma função de m e L .

Do conjunto de soluções de estados propícios à emergência de inteligência, o número mínimo de ligações para o sistema possuir uma estrutura mundo pequeno é determinado pela condição:

$$n > m \quad (24)$$

Esta condição implica que (23) tem sempre uma solução possível para L (com L igual a $\log_2(m)$ no caso extremo de n igual a m).

Podemos concluir que somente os dois estados propícios à emergência de inteligência de menor conectividade ($n = m$ da primeira condição e $n = m/2$ da segunda condição) não possuem configurações mundo pequeno, pelo que, a vasta maioria dos estados terá configurações mundos pequenos.

Para suportar esta afirmação precisamos calcular os coeficientes de agrupamento dos estados propícios à emergência de inteligência.

5. Cálculo do coeficiente de agrupamento de estados propícios à emergência de inteligência

Da definição de coeficiente de agrupamento [8], com E_i o número de ligações entre os k_i elementos ligados a um certo elemento, e $\frac{k_i \cdot (k_i - 1)}{2}$ o máximo número de ligações possível entre esses elementos, o coeficiente de agrupamento do sistema, $C(p)$, é determinado pela média para todos os elementos:

$$C(p) = \langle C_i \rangle_i = \left\langle \frac{2 \cdot E_i}{k_i \cdot (k_i - 1)} \right\rangle_i \quad (25)$$

Para calcular esta quantidade com precisão é necessário o conhecimento total da configuração de ligações. Tal conhecimento e posterior cálculo para todas as configurações em sistemas com $m \gg 1$ é impossível [47]. Felizmente, não obstante, é possível mostrar que estados propícios à emergência de inteligência têm coeficientes de agrupamento compatíveis com estruturas mundo pequeno.

Para obter um valor médio do coeficiente de agrupamento em estados propícios à emergência de inteligência, começamos por considerar número total de ligações destes estados. De 13(a):

$$n_k = m \cdot p$$

Donde, e porque cada elemento tem, em média $2 \cdot p$ ligações:

$$k_i = 2 \cdot p \quad (26)$$

Para calcular E_i destes $2 \cdot p$ elementos considere-se a seguinte figura, como exemplo:

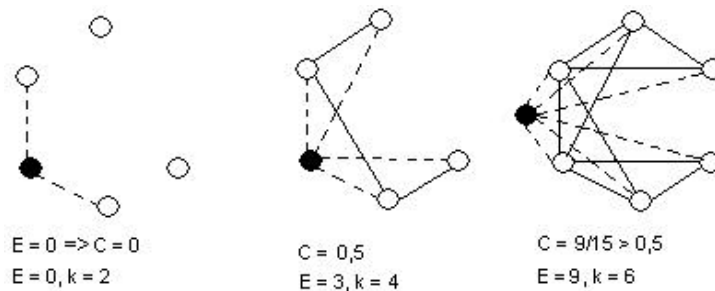


Figura 1 – Detalhe de grafos regulares com $k = 2,4,6$, das ligações entre k elementos (ligados a um único elemento). Para $k = 2$, $C(p) = 0$. Mundos pequenos somente aparecem para $k > 2$. Note-se que foram representadas somente as ligações pertinentes à análise em causa.

É necessário calcular $\langle E_i \rangle$, em geral, para qualquer k. Para isso, desenvolvemos uma fórmula que, supondo k par e $m > 2 \cdot k$, e supondo ainda um grafo com $m \gg 1$ tal que os primeiros vizinhos de k não são também vizinhos de ordem 1 entre si devido a outras ligações. Supondo k par, para m grande ($m \gg 1$), tem-se:

$$\langle E \rangle = 3 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} \left(\frac{k}{2} - i \right) \quad (27)$$

É possível verificar que esta equação é verdadeira, nas condições declaradas. Imagine-se uma “parte” de uma rede circular e analise-se o caso de um elemento e seus vizinhos de ambos os “lados” (figura 2).

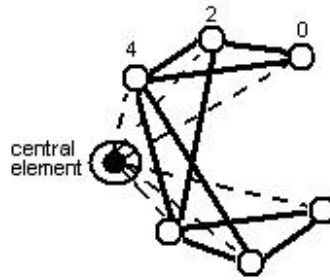


Figura 2 – Processo de contagem de ligações entre vizinhos de um “elemento central.” As linhas a cheio representam as ligações pertinentes para a computação de \bar{E} . Note-se que o número de ligações entre vizinhos do elemento “central” diminui linearmente, à medida que nos “afastamos” do elemento central. Isto porque cada par de elementos pode ter somente uma ligação entre si e também porque as ligações ao elemento “anterior” já foram levados em conta no processo de contagem anterior.

Considerando um 1º vizinho, ele também é ligado a k elementos, da mesma maneira que o elemento central o é. Destes k elementos, $k/2$ são no mesmo “lado” do elemento inicial que o tal vizinho. Destes, $[(k/2)-1]$ elementos também têm uma ligação ao “elemento central.”

Para o próximo vizinho somente consideramos $[(k/2)-2]$ ligações aos elementos também ligados ao elemento central, pois o resto das ligações já foi levado em conta. O processo repete-se até se alcançar um vizinho do elemento central cujas ligações aos outros vizinhos já tenham sido contadas pelos termos anteriores.

Então, o número de ligações entre os vizinhos no lado esquerdo (por exemplo) do

elemento central é: $\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} \left(\frac{k}{2} - i \right)$. O mesmo é verdade para o outro lado e assim tem-se

$\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} \left(\frac{k}{2} - i \right)$ ligações adicionais.

Agora tem que se contar as ligações entre vizinhos de um lado com os do outro lado. Estas ligações podem ser contadas somente considerando as ligações de um lado para o outro e não ao contrário, de modo a não contar uma ligação duas vezes.

O número destas ligações é exactamente $\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} \left(\frac{k}{2} - i \right)$. Então, o número total de ligações entre os vizinhos de um elemento central, num sistema onde cada elemento tem,

em média, k ligações é determinado aproximadamente por: $3 \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} \left(\frac{k}{2} - i \right)$.

Desta fórmula, é possível obter $\langle E \rangle$, conhecendo k . Pode-se conferir a validade da fórmula usando exemplos simples, contando as ligações nas figuras de grafos, como no caso da figura 2, por exemplo. Da fórmula, para k igual a 2, $\langle E \rangle$ é nulo. Quando $k = 4$, $E = 3$, para $k = 6$ vem $E = 9$ e, para k igual a 8 tem-se $E = 18$.

Pode-se simplificar (27):

$$\langle E \rangle = 3 \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{\frac{k}{2} - 1}{2} \quad (28)$$

Substituindo $\langle E \rangle$ e k na definição de coeficiente de agrupamento:

$$\Rightarrow C(p) = 2 \cdot \frac{3 \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{\frac{k}{2} - 1}{2}}{2 \cdot p \cdot (2 \cdot p - 1)} \quad (29)$$

$$\text{Como } k = 2 \cdot p: \quad C(p) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(p-1)}{(2 \cdot p - 1)} \quad (30)$$

Das condições de estado propício à emergência de inteligência, como p adota valores inteiros no intervalo, $1 \leq p \leq \frac{m-1}{4}$, os valores extremos do coeficiente de agrupamento destes estados são, usando (30) e os valores extremos de p :

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{(1-1)}{(2 \cdot 1 - 1)} \leq C(p) \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(\frac{m-1}{4} - 1\right)}{2 \cdot \left(\frac{m-1}{4}\right) - 1} \quad (31)$$

O primeiro extremo é nulo, correspondendo ao estado $n = m$. O segundo extremo pode ser obtido em aproximação, supondo $m \gg 1$:

$$\Rightarrow 0 \leq C(p) \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(\frac{m}{4}\right)}{\left(\frac{m}{2}\right)} \quad (32)$$

$$\Rightarrow 0 \leq C(p) \leq \frac{3}{4} \quad (33)$$

Na realidade, $(3/4)$ é o valor extremo na aproximação $m \gg 1$, calculado por vários autores [8][35], para estruturas mundo pequeno.

É agora possível comparar este resultado com os valores de $C(p)$ de redes aleatórias, calculável em aproximação pela fórmula seguinte [8]:

$$C_{\text{rand}} = \frac{k}{m} \quad (34)$$

$$\text{Como } k = 2 \cdot \frac{n}{m} = 2 \cdot p, \text{ então: } C_{\text{rand}} = \frac{2 \cdot p}{m} \quad (35)$$

Porque, $1 \leq p \leq \frac{m-1}{4}$, os valores extremos de $C(p)$, para estados propícios à emergência de inteligência, são, supondo distribuições aleatórias de ligações :

$$\Rightarrow \frac{2}{m} \leq C_{\text{rand}} \leq 2 \cdot \frac{m-1}{4} \quad (36)$$

$$\Rightarrow \text{Para } m \gg 1: \quad 0 < C_{\text{rand}} < \frac{1}{2} \quad (37)$$

Este valor para estruturas aleatórias é sempre menor que o previamente obtido para as configurações mundos pequenos. Assim, o coeficiente de agrupamento existente em alguns estados propícios à emergência de inteligência é, para algumas configurações, característico de estruturas mundo pequeno.

Somente usámos a primeira ($n_k = k \cdot m$) (13a) e terceira condição ($n_k < n_{\text{max}}/2$) (15) de estados propícios à emergência de inteligência. Não obstante, sabe-se que, para m ímpar, a condição (13b) obtém as mesmas soluções que (13a), e o mesmo pode ser dito quando m par, se forem usadas quantidades médias. A única observação importante é que, o estado $n = m/2$, da segunda condição, não tem um grau de separação característico de mundos pequenos (da mesma maneira que $n = m$, da primeira condição, não tem).

Conclusões

Da observação que alguns sistemas neuronais biológicos e outros sistemas onde elementos trocam informação entre si, adopte estruturas mundo pequeno, fomos verificar se sistemas inteligentes são sempre mundos pequenos. Para tal ser verdade, a estrutura mundo pequeno deveria ser o resultado das condições de emergência de inteligência.

Depois de determinar o conjunto de estados propícios à emergência de inteligência em sistemas de m elementos, fomos em verificar quais destes são estruturas mundo pequeno, i.e., para cada estado propício à emergência de inteligência, o coeficiente de agrupamento correspondente e grau de separação médio foram calculados.

Comparámos os valores obtidos com os que seriam obtidos supondo distribuições aleatórias de ligações. Verificámos que, embora a maioria de estados propícios à emergência de inteligência seja capaz de adoptar estruturas mundo pequeno, alguns não o são. Assim, as condições à emergência de inteligência não implicam, em todos os casos, a existência de uma estrutura mundo pequeno embora na maioria de casos tal seja possível.

Os valores do grau de separação médio e do coeficiente de agrupamento foram obtidos usando os valores médios do número de ligações de cada elemento. Note-se que, para cada estado propício à emergência de inteligência, algumas configurações são mundos pequenos, e algumas não serão.

Referências

- [1] Andre S. Ribeiro, F. Carvalho Rodrigues, “Critérios para inteligência do sistemas”, submeteu para publicação.
- [2] Andre S. Ribeiro, F. Carvalho Rodrigues, “O aparecimento de inteligência em um sistema”, submeteu para publicação.
- [3] Andre S. Ribeiro, F. Carvalho Rodrigues, “Estratégias para sistemas para atingir estados propícios à emergência de inteligência”, submeteu para publicação.
- [4] “Cálculo fazem Consumo Energético e de Capacidade de Armazenamento em de Informação Sistemas Complexos”, F. Carvalho Rodrigues, André S. Ribeiro, Setembro de 2002, Conferencia de de Nacional Física 2002, Portugal.
- [5] o Custo em Energia e a tempo da Inteligência”, F. Carvalho Rodrigues, André S. Ribeiro, Scientific Annals of UnI, Vo12, no. 3, Winter 2001
- [6] S. Milgram, “The Small World Problem”, Psychol. Today 2, 60-67 (1977)
- [7] Granovetter, Mark S. “The strength of weak ties.” American Journal of Sociology, Volume 78, Issue 6 (May, 1973) 1360-1380.
- [8] Watts, D. J. & Strogatz S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. Nature 393, 440–442 (1998).
- [9] D. J. Watts. “Networks, Dynamics and The Small World Phenomenon”, American Journal of Sociology 105(2):493-527 (1999).
- [10] P. Erdos and A. Rényi, On the evolution of random graphs, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 5 (1970), 17-61.
- [11] “Transições de fase geométricas em redes esparsas e simulações de um processo de não-equilíbrio” Marcio Argollo Ferreira de Menezes, PhD Thesis
- [12] D. J. Watts. Small Worlds: The Dynamics of Networks Between Order and Aleatoriedade. Princeton, NJ, Princeton University Press (1999).
- [13] Fan Chung Linyuan Lu “The average distance in a random graph with given expected degrees” Dep. of Mathematics, University of California at San Diego, La Jolla, CA 92093-0112
- [14] A-L Barabási and R Albert 1999 “Emergence of scaling in random networks” Science 286 509
- [15] Achacoso, T., and Yamamoto, W. (1992) AY’s Neuroanatomy of C. Elegans for computation, Boca Raton, FL: CRC.
- [16] Caenorhabditis elegans WWW Server - <http://elegans.swmed.edu/>
- [17] WormBase - <http://www.wormbase.org/>
- [18] Wood, W.B., et al, In “The Nematode Caenorhabditis Elegans (Monograph 17)” (W.B. Wood and Community of C. Elegans Researchers, Eds), pp. 1-489. Cold Spring Harbor, NY, 1988.
- [19] Worm Atlas - <http://www.wormatlas.org/index.htm>
- [20] White, J. G., Southgate, E., Thomson, J. N. and Brenner, S. (1986). “The structure of the nervous system of Caenorhabditis Elegans”. Phil. Trans. R.Soc. Lond. B 314, 1-340.
- [21] <http://elegans.swmed.edu/Sydney.html>
- [22] Barabasi, Albert-Laszlo. Linked: The New Science of Networks. Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing, 2002.
- [23] Albert R, Jeong H, Barabasi A-L 1999: Diameter of the World-Wide Web. Nature, 410,9,130-131.
- [24] “Scale-free characteristics of random networks: The topology of the world wide web,” A.-L. Barabási, R. Albert, and H. Jeong, Physics A 281, 69-77 (2000)
- [25] “Power-Law Distribution of the World Wide Web,” A.-L. Barabási, R. Albert, H. Jeong, and G. Bianconi, Science 287, 2115 (2000).
- [26] “The large-scale organization of metabolic networks,” H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. Oltvai, and A.-L. Barabási, Nature 407, 651-654 (2000).
- [27] “Topology of evolving networks: local events and universality,” R. Albert and A.-L. Barabási, Phys. Rev. Lett. 85, 5234 (2000).
- [28] “Competition and multiscaling in evolving networks”, G. Bianconi, A.-L. Barabasi, Europhys. Lett. 54 436 (2001).
- [29] “The physics of the Web”, A.-L. Barabasi, Physics World, 14, 33 (2001).
- [30] W. Aiello, F. Chung, L. Lu. Random evolution of massive graphs. Handbook of Massive Data Sets, (Eds. James Abello et al.), Kluwer, 2002, pages 97-122

- [31] M.E.J. Newman, S.H. Strogatz, D.J. Watts. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. Phys. Rev. E 64, 026118 (2001).
- [32] Soon-Hyung Yook, Hawoong Jeong, and Albert-László Barabási Modeling the Internet's large-scale topology. Proceedings of the Nat'l Academy of Sciences 99, 13382-13386 (2002).
- [33] Jon M. Kleinberg, Ravi Kumar, Prabhakar Raghavan, Sridhar Rajagopalan, Andrew S. Tomkins, The Web as a Graph: Measurements, Models, and Methods, Proceedings of the 5th Annual International Conference on Computing and Combinatorics, 1999
- [34] Watts, D.J. (1999b). Networks, dynamics, and the small-world phenomenon. American Journal of Sociology, 105, 493-527
- [35] Petter Holme, "Characteristics of Small World Networks", 20th April 2001.
- [36] http://www.efunda.com/math/exp_log/log_relation.cfm
- [37] J. Davidsen, H. Elber, S. Bornholdt, "Emergence of a Small World from Local Interactions: Modeling Acquaintance Networks", Phys. Rev. Lett. 88, number 12, (25 March 2002).
- [38] Case, J. "The continuing Appeal of Small-World Network", SIAM News, Vol 34 n° 4.
- [39] M. E. J. Newman, "Clustering and preferential attachment in growing networks" cond-mat/0104209.
- [40] Carvalho Rodrigues, F., Dockery, J., 1937, "Defining Systems Based on Information Exchange: Structure from Dynamics", BioSystems 38,229-234.
- [41] Carvalho Rodrigues, F.,1990/1991, "Função de Coesão de Estruturas baseadas em Informação", Memórias da Academia, TOMO XXXI, Academia das Ciências de Lisboa.
- [42] Carvalho Rodrigues, F., Dockery, J. and Rodrigues, T., 1993b, "Entropy of Plagues: A Measure Assessing the Loss of social Cohesion Due to Epidemics", Euro. J. Operational Research,71,45-60.
- [43] "Hidden Order", J. Holland, Addison Wesley, 1995.
- [44] Von Bertalanffy, Ludwig (1973) General System Theory (Harmondsworth: Penguin Books).
- [45] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication", Bell System Technical Journal, vol. 27, pp. 379-423 and 623-656, July and October, 1948.
- [46] Jumarie, Guy M., "Subjectivity, Information, Systems, An introduction to a theory of relativistic cybernetics", Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1986.
- [47] H. J. Bremmann, "Complexity and transcomputability", in The Encyclopedia of Ignorance, M. Duncan, ed. Pergamon Press, Oxford (1977).

Capítulo 5

A relação entre conectividade e grau de separação médio em grafos

Resumo

Neste capítulo é analisado o efeito da variação da conectividade [1] no grau de separação médio [2] em grafos. Determinamos, em geral, a variação da conectividade necessária para uma dada variação do grau de separação médio.

Em sistemas onde os elementos são capazes de trocar informação [3][4] entre si, um aumento da velocidade a que essas transferências de informação são feitas é alcançável com um aumento em conectividade [5]. Tal aumento em conectividade é feito à custa de um aumento da energia interna do sistema, isto é, do número total de ligações do sistema.

Assim, calculamos o custo da variação do grau de separação médio, em energia interna [6], devido à necessidade de aumento de conectividade. Dependendo das limitações energéticas do sistema, um valor do grau de separação médio mínimo pode ser estabelecido.

Palavras-chave: Conectividade, Grau de separação médio.

1. Introdução

Um sistema é um conjunto de elementos e ligações [7], cuja estrutura reside nas interações, e não nas propriedades internas dos elementos [7][8][9].

A taxa de transferência de informação entre elementos é directamente dependente do grau de separação médio do sistema.

É sabido que o aumento da informação [10], em alguns casos, leva o sistema a mudanças estruturais [11]. A propagação de doenças [12], o fluxo de tráfego, a coesão de exércitos [13] e muitas outras propriedades [14] exibidas pelos sistemas, são também determinadas pela estrutura de interações entre elementos, mais do que pelas propriedades internas dos elementos.

Em geral, quanto menor é o grau de separação dos elementos, mais rápido se torna a troca de informação entre eles. Porém, a diminuição do grau de separação só acontece à custa do aumento em conectividade, ou seja, à custa de um aumento da energia interna do sistema, necessária para criar as ligações que reduzam o grau de separação.

É possível determinar a variação necessária em conectividade de forma a diminuir o grau de separação médio num sistema. Desta análise, uma lei de variação do grau de separação médio com a conectividade é estabelecido, donde se deduz uma relação do custo, em energia interna, para construir a estrutura que suporta o sistema.

2. Energia interna

Para este cálculo, usamos um modelo de sistema onde elementos são pontos e interações são linhas que ligam elementos [15][16], sendo a localização espacial dos elementos e a distância métrica entre eles irrelevantes.

Assim, a energia interna U de um sistema, é função do número de elementos e ligações pois estes são os únicos componentes do sistema. Note-se que o comprimento de tais ligações não é pertinente pois, no modelo de sistema aqui usado, não é conhecida a localização espacial dos elementos. Então, para um sistema de m elementos e n ligações, tem-se:

$$U = U(m,n) \quad \text{tal que: } U \propto n, m \quad (1)$$

Do modelo resulta que a energia interna aumenta quando o número de ligações aumenta.

Com esta medida de energia interna é possível estimar o custo de diminuir o grau de separação médio de um sistema de m elementos, através da análise da variação de conectividade necessária.

3. Cálculo da variação do grau de separação médio em função da conectividade

Suponha-se um sistema de m elementos e n ligações. Se k representa o número médio de ligações de cada elemento [17], tem-se para um sistema de m elementos e n ligações:

$$k = 2n/m \quad (2)$$

Para uma distribuição de ligações aproximadamente uniforme, o grau de separação médio do sistema, L , que mede o número de ligações mínimo a percorrer para um sinal de um elemento do sistema atingir outro, é dado por [14][16]:

$$L = \log(m)/\log(k) \quad (3)$$

É possível estudar a variação necessária em conectividade para diminuir o grau de separação médio de um sistema de m elementos e n ligações. Desta equação e da definição de k :

$$\Rightarrow L = \frac{\log(m)}{\log\left(\frac{2.n}{m}\right)} \quad (4)$$

Seja C a conectividade tal que: $C = n/m$ [18]. Assim, tem-se:

$$\Rightarrow L = \frac{\log(m)}{\log(2.C)} \quad (5)$$

Desta expressão, e supondo grandezas contínuas, é possível calcular a variação de L , ou seja, $dL(m,C)$:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial m} dm + \frac{\partial L}{\partial C} dC \quad (6)$$

Assim:

$$\Rightarrow dL = \left(\frac{1}{\log(2.C)}\right)\left(\frac{1}{m}\right)dm + \left(-\frac{1}{C.\log(2.C)} \cdot \frac{\log(m)}{\log(2.C)}\right)dC \quad (7)$$

Multiplicando e dividindo o primeiro termo por $[\log(m)]$ fica:

$$\Rightarrow dL = \left(\frac{\log(m)}{\log(2.C)}\right)\left(\frac{1}{\log(m).m}\right)dm + \left(-\frac{1}{C.\log(2.C)} \cdot \frac{\log(m)}{\log(2.C)}\right)dC$$

Como $L = \frac{\log(m)}{\log(2.C)}$, tem-se:

$$\Rightarrow dL = L \cdot \left(\frac{1}{\log(m).m}\right)dm + \left(-\frac{1}{C.\log(2.C)}\right)L.dC$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{L} = \left(\frac{1}{\log(m).m} \right) dm + \left(-\frac{1}{C.\log(2.C)} \right) dC \quad (8)$$

É possível estudar a variação de L, para uma variação da conectividade, supondo que tal variação acontece com um número constante de elementos, variando somente o número total de ligações. Neste caso, $dm = 0$, donde:

$$\Rightarrow \frac{dL}{L} = \left(-\frac{1}{C.\log(2.C)} \right) dC \quad (m \text{ constante}) \quad (9)$$

Assim, a variação de L com C é determinada por:

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial C} = -L \cdot \left(\frac{1}{C.\log(2.C)} \right) \quad (10)$$

Note-se que, como $C > 0$ e $\log(2.C) > 0$, porque $2.C > 1$, se $n > m/2$, então:

$$\frac{\partial L}{\partial C_{(m_{const})}} < 0, \quad \text{se } n > \frac{m}{2}. \quad (11)$$

A condição de conectividade mínima, aqui imposta, equivale a impor que todos os m elementos do sistema pertençam a um mesmo conjunto de elementos, i.e., este é o valor mínimo para ocorrer uma transição de fase de um sistema de elementos esparsamente ligados para um sistema com um agrupamento “gigante” [18][19].

Desta relação conclui-se que o grau de separação médio diminui com o aumento de conectividade, para um número constante de elementos. Tal variação possui uma característica importante. De (10) pode-se concluir que esta variação é negativa e superior em módulo para valores crescentes de L, ou, por outras palavras, a variação de L é cada vez menor para variações constantes de C.

Concluimos que é necessário introduzir um número crescente de ligações para reduzir o grau de separação médio de modo constante. Podemos verificar este resultado calculando a variação da conectividade relativa supondo L constante. De (4):

$$\Rightarrow L \cdot \log\left(\frac{2n}{m}\right) = \log(m) \quad (12)$$

Usando as propriedades da função logaritmo: $L.\log(2.n) - L.\log(m) = \log(m)$

$$\Rightarrow \log(2.n) = \frac{L+1}{L} \cdot \log(m) \quad (13)$$

É agora possível derivar esta equação em ambos os lados supondo que as variáveis são contínuas e L constante. Usando a base natural para os logaritmos [20],

$$\text{como: } d[\ln(u(x))] = \frac{du(x)}{u(x)}, \text{ tem-se: } \frac{d(2n)}{2n} = \frac{L+1}{L} \left(\frac{dm}{m} \right) \quad (14)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dn}{dm}}{\frac{n}{m}} = \frac{L+1}{L} \quad (15)$$

Esta expressão calcula a taxa de variação relativa da conectividade necessária para que o grau de separação entre os elementos varie de uma unidade, em função do valor inicial de L. Representaremos esta taxa de variação de conectividade relativa por $\Gamma(n/m)$:

$$\Gamma(n/m) = \left(\frac{\frac{dn}{dm}}{\frac{n}{m}} \right) \quad (16)$$

De (15), a taxa de variação da conectividade relativa pode ser calculada para qualquer variação do grau de separação médio desejada, resultando a seguinte tabela e gráfico:

L	Γ
1	2,00
2	1,50
3	1,33
4	1,25
5	1,20
6	1,17
7	1,14
8	1,13
9	1,11
10	1,10
11	1,09
12	1,08
13	1,08
14	1,07
15	1,07
16	1,06
17	1,06
18	1,06
19	1,05
20	1,05

Tabela 1: Taxa de variação da conectividade relativa para uma variação constante do grau de separação médio.

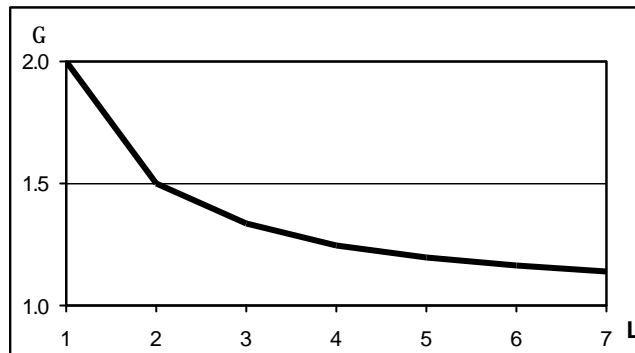


Figura 1: Taxa de variação da conectividade relativa para uma variação constante do grau de separação médio.

Observando a figura e os valores da tabela, concluímos que, a diminuição do grau de separação médio se torna cada vez mais dispendiosa em unidades de energia interna (i.e, em ligações a introduzir) para uma redução constante. Por exemplo, diminuir L de 6 para 5 precisa de muito menos ligações extras que as necessárias introduzir para diminuir L de 2 para 1.

Note-se que, com esta fórmula, dependendo das limitações energéticas específicas dos sistemas, um valor do grau de separação médio mínimo pode ser estabelecido.

Uma nota final pode ser dada relativamente à entropia termodinâmica do sistema. Enquanto $n < n_{\max}/2$, a entropia termodinâmica aumenta com o aumento do número de ligações [5][6]. Este aumento de entropia corresponde a um aumento em calor necessário remover (para manter o sistema a temperatura constante [5]). Esta necessidade de mais energia, pelo sistema, é mais uma limitação à diminuição do grau de separação médio que deve em alguns casos particulares, ser levada em consideração.

Conclusões

Neste trabalho foi analisada a relação entre as variações da conectividade e do grau de separação médio em sistemas.

Em sistemas de elementos capazes para trocar informação entre si, um aumento da velocidade de troca de informação é alcançável através de um aumento em conectividade. Este aumento em conectividade é conseguido à custa do aumento da energia interna do sistema, função do número total de ligações do sistema, no modelo de sistema aqui usado.

Calculámos o custo da variação do grau de separação médio em termos do número de ligações que devem ser introduzidas ou removidas para tal variação ocorrer.

A fórmula obtida permite calcular a variação relativa da conectividade que causa uma variação de uma unidade no grau de separação entre os elementos, em função do valor inicial de L. Isto é, supondo um valor inicial de L, determina-se a variação em conectividade necessária para reduzir (ou aumentar) L de uma unidade.

Com uma medida de energia interna pode-se estabelecer, em geral, o custo de diminuir o grau de separação médio de um sistema de m elementos, em aumento de

energia interna necessário. Dependendo das limitações energéticas do sistema, um valor do grau de separação médio mínimo pode ser estabelecido.

Referências

- [1] B. Bollobas. Random Graphs. Academic Press, NY, 1985
- [2] Watts, D. J. & Strogatz S. H. Collective dynamics of 'small-world' networks. Nature 393, 440–442 (1998).
- [3] Carvalho Rodrigues, F., Dockery, J., 1937, "Defining Systems Based on Information Exchange: Structure from Dynamics", BioSystems 38,229-234.
- [4] Andre S. Ribeiro, F. Carvalho Rodrigues, "The emergence of intelligence in a system", submitted for publication.
- [5] Andre S. Ribeiro, F. Carvalho Rodrigues, "Strategies for systems to attain prone states for intelligence emergence", submitted for publication.
- [6] Andre S. Ribeiro, F. Carvalho Rodrigues, "Criteria for systems intelligence", submitted for publication.
- [7] Von Bertalanffy, Ludwig (1973) General System Theory (Hammondsworth: Penguin Books).
- [8] J. Holland, "Hidden Order", Addison Wesley, 1995.
- [9] Ashby, W. Ross, An Introduction to Cybernetics. London: Chapman & Hall, 1956.
- [10] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication", Bell System Technical Journal, vol. 27, pp. 379-423 and 623-656, July and October, 1948.
- [11] J. Pinto Peixoto, F. Carvalho Rodrigues, "Sistemas, Entropia, Coesão", Editorial Discórdia, Lisboa, 1991.
- [12] M. E. J. Newman, The spread of epidemic disease on networks., Phys. Rev. E 66, 016128 (2002).
- [13] Carvalho Rodrigues, F., 1989. "A proposed entropy measure for assessing combat degradation", J. Opl. Res. Soc. (UK), 40 (8): 789-93.
- [14] Granovetter, Mark S. "The strength of weak ties." American Journal of Sociology, Volume 78, Issue 6 (May, 1973) 1360-1380.
- [15] Barabasi, Albert-Laszlo. Linked: The New Science of Networks. Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing, 2002.
- [16] M.E.J. Newman, S.H. Strogatz, D.J. Watts. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. Phys. Rev. E 64, 026118 (2001).
- [17] Albert R, Jeong H, Barabasi A-L 1999: Diameter of the World-Wide Web. Nature, 410,9,130-131.
- [18] P. Erdos and A. Rényi, On the evolution of random graphs, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 5 (1960), 17-61.
- [19] "At Home in the Universe", Kauffman, S. A., Oxford U. Press, 1995.
- [20] http://www.efunda.com/math/exp_log/log_relation.cfm